

WYTRZYMAŁOŚĆ ELEKTRYCZNA

3. WYZNACZANIE ROZKŁADU NATEŻENIA POLA

3.1. WIADOMOŚCI WSTĘPNE

Jak już wspomniano, przy odpowiednio dużych wartościach natężenia pola elektrycznego \mathbf{K} może nastąpić zachwianie struktury układu izolacyjnego poprzez zapoczątkowanie zjawisk wyładowania elektrycznego prowadzących do przeskoku lub przebicia, a w konsekwencji do uszkodzenia lub zniszczenia izolacji. Należy zaznaczyć, że minimalna wartość $\mathbf{K_p}$ zależy nie tylko od rodzaju dielektryka, ale także od rozkładu pola elektrycznego, czyli od zmienności natężenia \mathbf{K} w przestrzeni między elektrodami. Stąd podstawowym problemem przy konstruowaniu układu izolacji jest określenie:

- maksymalnego natężenia pola,
- rozkładu pola,
- natężeń dopuszczalnych i porównanie z maksymalnie występującymi.

3.1.1. Pojęcia podstawowe

Pole elektrostatyczne jest to pole wytwarzane przez ładunki nieruchome i niezmiennie w czasie. W polu tym nie zachodzą procesy energetyczne. Jest to idealny model teoretyczny spełniający warunki:

- jest polem bezwirowym czyli spełniającym zależność (3.1), a napięcie między dwoma punktami jest określone jednoznacznie jako różnica ich potencjałów

$$\oint_c K \cdot dl = 0 \quad (3.1)$$

gdzie c - dowolny kontur zamknięty,

- a) jest polem bez upływności czy innych strat energii, a sprzężenia w tym polu mają charakter wyłącznie pojemnościowy.

Pole elektryczne przy napięciu stałym jest polem przepływowym, nazywanym czasem, w odróżnieniu od pola w przewodnikach, polem upływnościowym.

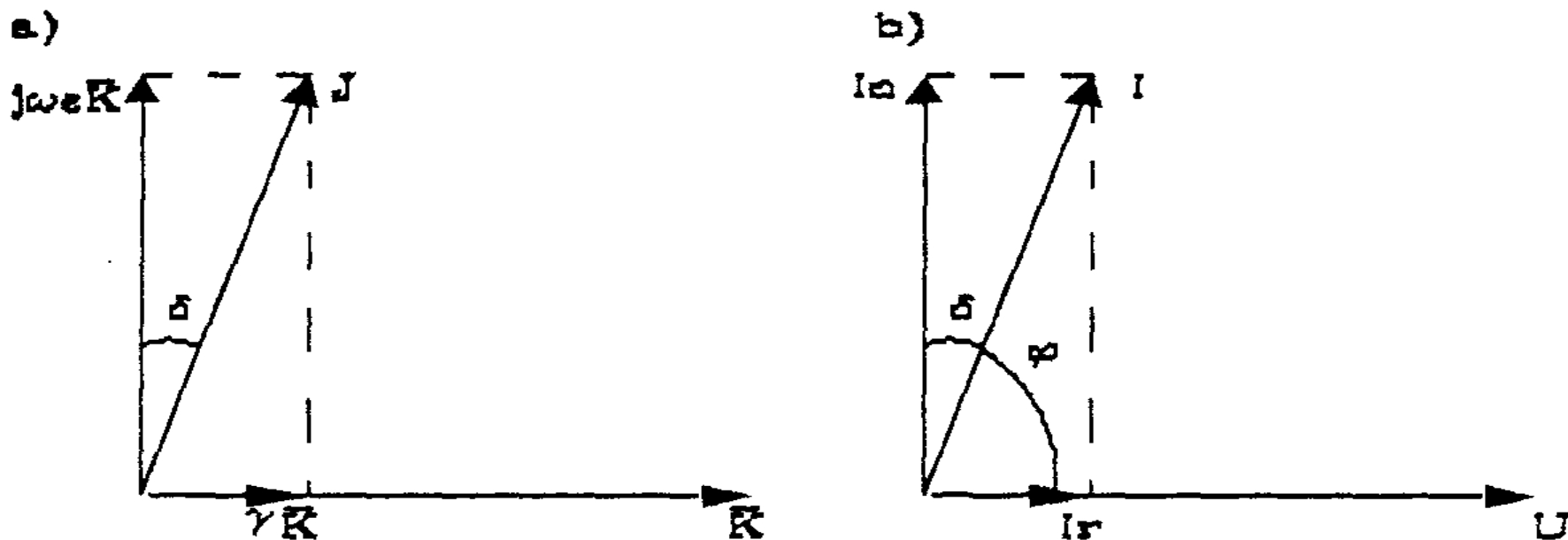
Pole elektryczne przy napięciu przemiennym, zwane w skrócie polem elektrycznym, odpowiada w przybliżeniu polu elektrostatycznemu, jeśli są spełnione dwa warunki:

- jeśli wymiary układu są bardzo małe w porównaniu z długością fali napięcia to wówczas jest spełniony warunek bezwirowości pola elektrostatycznego czyli, że napięcie między dwoma punktami nie zależy od kształtu linii je łączącej; w przeciwnym przypadku tzn. przy dużych, w porównaniu z długością fali, wymiarach wartość dodatkowego natężenia pola ΔK indukowanego zgodnie z II prawem Makswella nie może być pominięta; w praktycznym zakresie wymiarów i częstotliwości warunek ten jest zawsze spełniony np. przy 50 Hz długość fali $\lambda \approx c/f \approx 6000 \text{ km}$ (gdzie c – prędkość światła, f -częstotliwość), natomiast przy 100 MHz nadal jest $\lambda = 3 \text{ m}$;
- jeśli upływności są bardzo małe w porównaniu z pojemnościami to jest spełniony warunek rozkładu pojemnościowego; dobre dielektryki winny się charakteryzować dużymi rezystywnościami $> 10^9 \Omega\text{cm}$, a więc warunek ten jest spełniony.

Tym niemniej w dielektrykach rzeczywistych zawsze występuje pewna niewielka upływność. W polu elektrycznym sinusoidalnie przemiennym upływność tę charakteryzuje się współczynnikiem strat dielektrycznych $\text{tg}\delta$ lub kątem strat dielektrycznych δ .

Kąt strat dielektrycznych δ w dowolnym punkcie pola elektrycznego określa się jako kąt między wypadkową gęstością prądu \mathbf{J} a składową pojemnościową tej gęstości $\mathbf{j}\omega\epsilon\mathbf{K}$ (zgodnie z I prawem Makswella - rys. 3.1a). Z wykresu tego wynika wzór

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\gamma}{\omega \cdot \epsilon} \quad (3.2)$$



Rys. 3.1. Definicja kąta stratności dielektrycznej: a) według I prawa Makswella, b) w ujęciu makroskopowym

Zwykle jest potrzebna znajomość współczynnika strat dielektrycznych dla całego układu izolacyjnego. Kąt δ określa się wówczas jako kąt między wskazem prądu wypadkowego \mathbf{I} i wskazem składowej pojemnościowej \mathbf{I}_c (rys. 3.1b). Kąt δ jest dopełnieniem do 90° kąta φ między prądem \mathbf{I} i napięciem \mathbf{U} . Straty dielektryczne tożsame z mocą czynną układu można więc obliczyć z wzoru

$$P_{cz} = U \cdot I \cdot \cos\varphi = \omega \cdot C \cdot U^2 \cdot \operatorname{tg}\delta \quad (3.3)$$

gdzie: $\omega C U^2$ - moc pojemnościowa, $\operatorname{tg}\delta$ - współczynnik określający jaką częścią mocy pojemnościowej są straty dielektryczne, stąd jego nazwa.

Straty upływnościowe nie są jedynymi stratami mocy czynnej w dielektryku (patrz rozdz. 5.5), nie mają nawet dominującego udziału w stratach całkowitych. Również $\text{tg}\delta$ traktowany makroskopowo w odniesieniu do całego układu izolacyjnego obejmuje, więc sumaryczne straty, nie tylko upływnościowe.

Zatem można powiedzieć, że pole elektryczne to pole elektrostatyczne nałożone na pole przepływowe, przy czym udział tego drugiego jest znikomy. Tym niemniej w polu elektrycznym zachodzą przemiany energetyczne, bowiem energia ruchu ładunków zamienia się na ciepło.

Rozkład pola elektrycznego jest definiowany przez linie sił pola i linie ekwipotencjalne, przy czym obie rodziny linii są wzajemnie ortogonalne. Linia sił pola nazywa się linię w przestrzeni, do której styczna w dowolnym punkcie ma kierunek wektora natężenia pola.

Istnienie pola elektrycznego można stwierdzić wprowadzając do niego ładunek q , gdyż będzie na niego działała siła F zależna od wartości liczbowej tego ładunku. Aby ładunek nie zniekształcał pola jest pożądane, by był on znikomy. Iloraz siły i ładunku jest natężeniem pola elektrycznego K , co można zapisać jako

$$K = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{F}{q} \quad (3.4)$$

skąd uzyskuje się jednostkę natężenia pola

$$1[K] = \frac{1[F]}{1[q]} = 1 \frac{N}{C} = 1 \frac{J}{m \cdot A \cdot s} = 1 \frac{V \cdot A \cdot s}{m \cdot A \cdot s} = 1 \frac{V}{m}$$

Wzór (3.4), powszechnie cytowany, jest o tyle niesłuszny, że ładunek ma budowę ziarnistą (nieciągłą) i posiada minimum w postaci ładunku elektronu, a więc nie może dążyć do zera.

Siła oddziaływania między dwoma ładunkami punktowymi jest dana prawem Kulomba i wynosi

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2} \quad (3.5)$$

stąd można wyprowadzić miano przenikalności elektrycznej ε :

$$1[\varepsilon] = \frac{1[q^2]}{1[F] \cdot 1[r^2]} = 1 \frac{C^2}{N \cdot m^2} = 1 \frac{A^2 \cdot s^2 \cdot m}{J \cdot m^2} = 1 \frac{A^2 \cdot s^2}{V \cdot A \cdot s \cdot m} = 1 \frac{F}{m}$$

Wypadkowa przenikalność elektryczna jest zapisywana jako iloczyn przenikalności elektrycznej próżni ε_0 i przenikalności elektrycznej względnej ε' określającej ile razy przenikalność elektryczna danego dielektryka jest większa od przenikalności elektrycznej próżni

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon' \quad (3.6)$$

gdzie ε_0 jest związane z przenikalnością magnetyczną próżni μ_0 i prędkością światła c zależnością

$$\varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot c^2 = 1 \quad (3.7)$$

gdzie: $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$, $\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{4 \cdot \pi \cdot 9} \text{ F/m}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

$$\left(4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{10^{-9}}{4 \cdot \pi \cdot 9} \right) \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 1 \blacksquare$$

Wartości przenikalności elektrycznych dla przykładowo wybranych dielektryków zestawiono w tabeli 3.

T a b e l a 3

Przenikalności elektryczne względne, niektórych materiałów elektroizolacyjnych

Dielektryk	ϵ'	Dielektryk	ϵ'
Gazy	~ 1.0	Bibułka kondensatorowa impregnowana olejem	$3.5 \div 4.3$
Olej transformatorowy	~ 2.2	Preszpan suchy	$2.5 \div 3.5$
Woda	~ 80.0	Preszpan w oleju transformatorowym	$4.0 \div 5.0$
Parafina	$2.0 \div 4.0$	Kauczuk naturalny	$2.4 \div 2.5$
Bursztyn	2.7	Guma izolacyjna	$2.7 \div 10.0$
Kalafonia	$2.5 \div 3.5$	Polietylen	$2.25 \div 2.4$
Szelak	$2.8 \div 4.0$	Polichlorek winylu (PCV, polwinit, itd.)	$3.2 \div 8.5$
Celuloza czysta	$5.5 \div 8.0$	Żywica epoksydowa	$3.3 \div 5.1$
Drewno (ϵ' rośnie z zawilgoceniem)	$2.0 \div 9.0$	Mika niemodyfikowana	$5.0 \div 9.3$
Drewno impregnowane olejem	~ 3.3	Szkło izolatorowe	$6.0 \div 8.0$
Jedwab naturalny	4.5	Porcelana elektrotechniczna	$5.5 \div 6.5$
Bibułka kondensatorowa (od 0.8 do 1.3 g/cm^3)	$1.75 \div 3.2$	Pleksiglas	3.5

3.1.2. Porównanie pola elektrostatycznego i przepływowego

Dla porównania rozważono dwa przypadki:

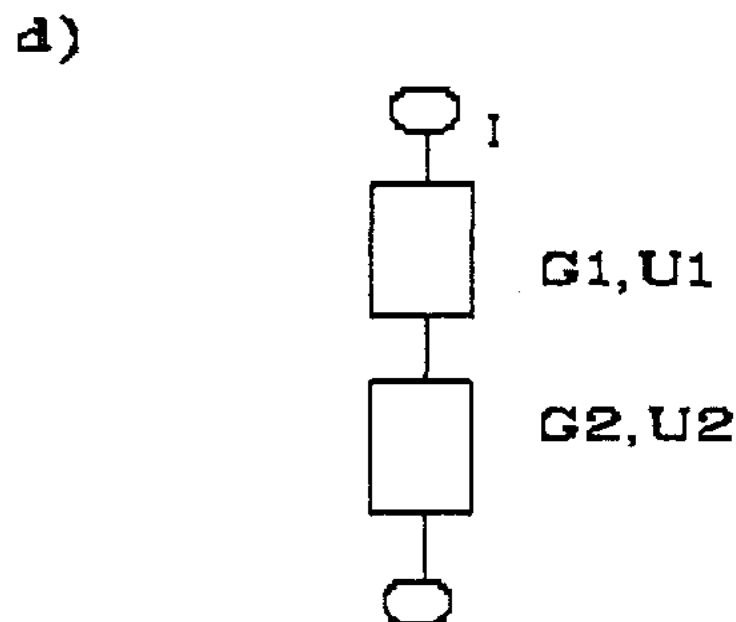
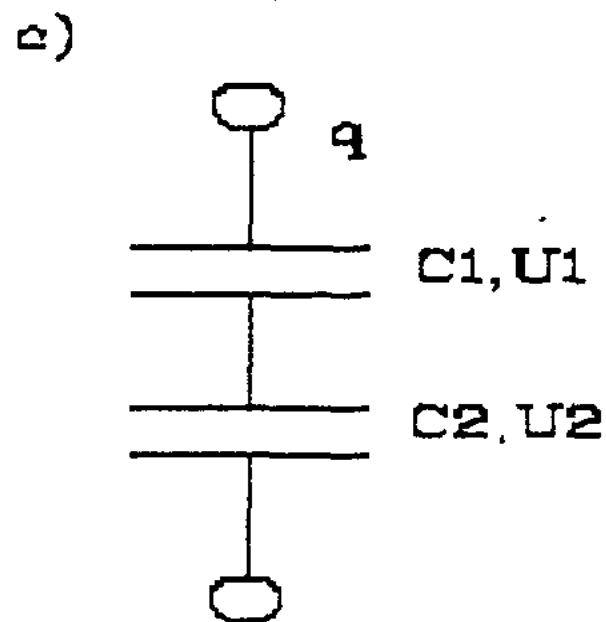
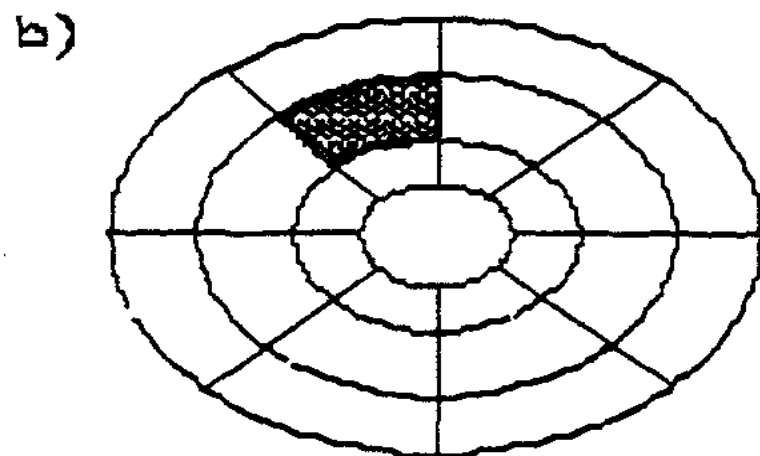
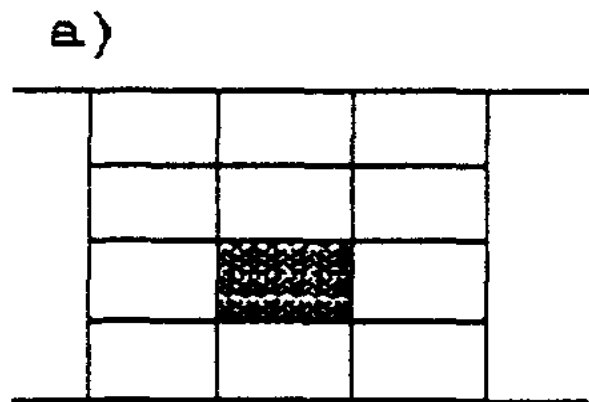
1. Dielektryk idealny, którego przewodność właściwa $\gamma = 0$, znajduje się w polu elektrostatycznym, podzielono na dwa szeregowo połączone elementy o pojemnościach C_1 i C_2 , na których odkładają się napięcia U_1 i U_2 (rys. 3.2 a,b) wówczas:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1}$$

gdzie: $C = \frac{\varepsilon \cdot s}{d}$, $U_1 = \frac{q}{C_1}$, $U_2 = \frac{q}{C_2}$

czyli: $U_1 \cdot C_1 = U_2 \cdot C_2$ (3.8)

gdzie: s - przekrój elementu prostopadle do linii sił pola, d - odstęp równoległy do linii sił pola.



Rys. 3.2. Przykłady podziału na elementy objętości: a) w układzie płaskim, b) w układzie walcowym, oraz schematy zastępcze dla dwóch szeregowych elementów: c) w polu elektros-
tycznym, d) w polu przepływowym

2. Dielektryk rzeczywisty o konduktywności $\gamma > 0$ znajduje się między elektrodami dołączonymi do źródła napięcia stałego; wówczas podział na dwa szeregowo połączone elementy daje schemat o dwóch szeregowych przewodnościach (rys. 3.2 c), na których odkładają się napięcia U_1 i U_2 spełniające warunek

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{G_2}{G_1}$$

gdzie: $G = \frac{\gamma \cdot s}{d}$, $U_1 = \frac{I}{G_1}$, $U_2 = \frac{I}{G_2}$

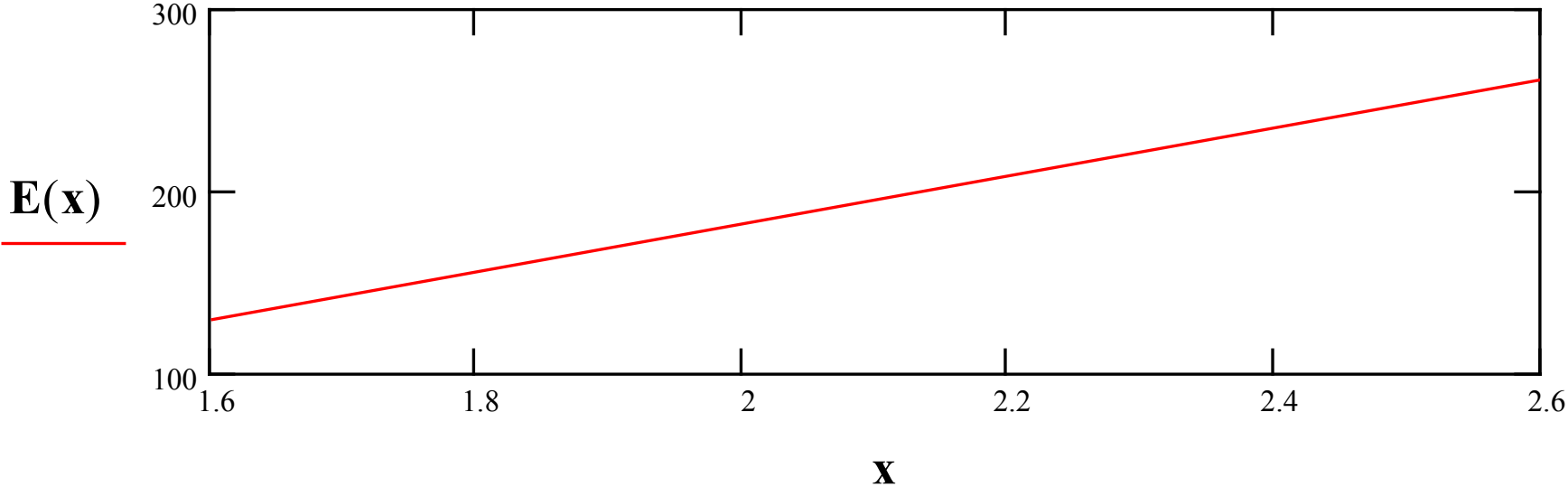
czyli: $U_1 \cdot G_1 = U_2 \cdot G_2$ (3.9)

Zatem można stwierdzić, że w układach jednorodnych, czyli w układach z dielektrykiem mającym jednakowe wartości przenikalności elektrycznej ε i przewodności właściwej γ we wszystkich punktach objętości jest słuszna równość:

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{C_2}{C_1}$$

a więc, że rozkład napięcia stałego, mimo że nie jest rozkładem elektrostatycznym, jest dokładnie taki sam jak rozkład elektrostatyczny i zależy jedynie od geometrii układu, która w rozważanym przypadku jest charakteryzowana wartościami s i d . Natomiast w dielektryku niejednorodnym, w którym występują fragmenty o różnych wartościach ε oraz o różnych wartościach γ rozkład napięcia stałego może się znacznie różnić od rozkładu elektrostatycznego.

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) := \mathbf{root}\left[\ln(\mathbf{E}) - \ln(\mathbf{Er}) + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{Er}) - \left(\alpha \cdot \mathbf{g} \cdot \frac{\mathbf{p}}{2 \cdot \pi} - 1\right) \cdot \ln\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{r}}\right), \mathbf{E}\right]$$



Sprawdzenie:

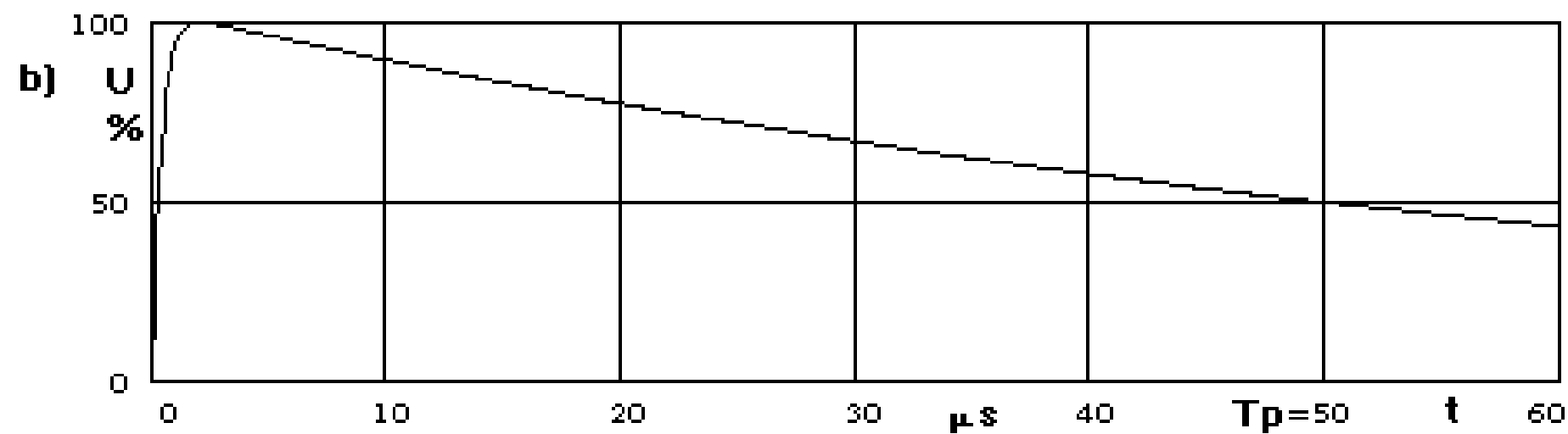
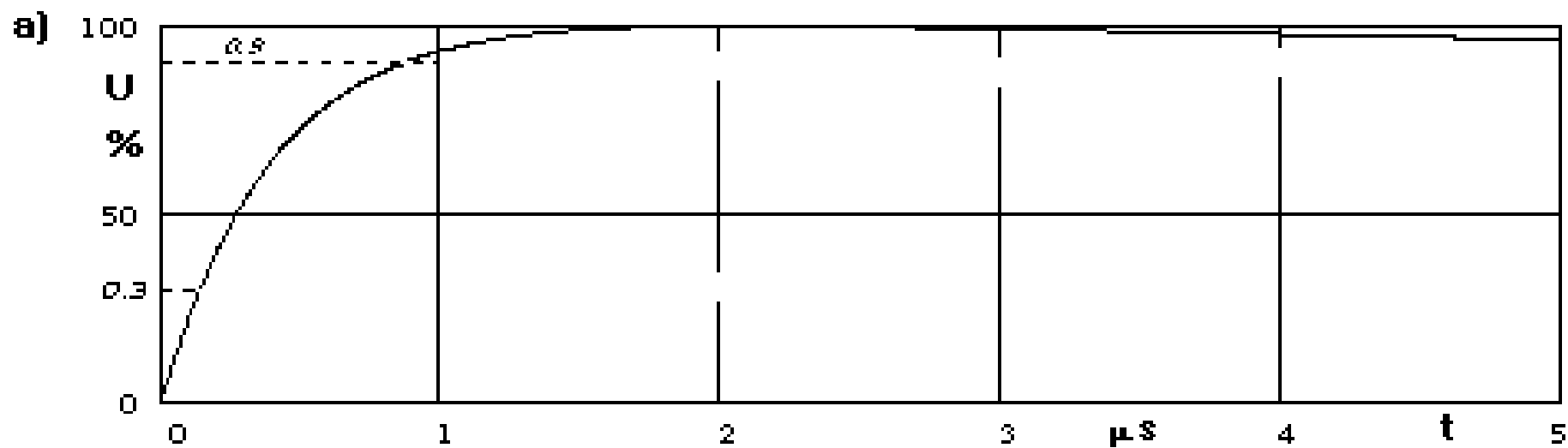
$$\mathbf{U} := \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{R}} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \, \mathbf{d}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{U} = 249.99659$$

3.1.3. Udar. Pole udarowe

Przebiegi atmosferyczne w sieciach napowietrznych mają charakter udarowy tzn. trwają bardzo krótko w czasach rzędu mikrosekund. W laboratoriach odwzorowuje się wyładowania piorunowe za pomocą tzw. udaru napięciowego normalnego (rys.3.3 - patrz również rozdz. 11) charakteryzowanego czasem trwania czoła udaru T_1 i czasem do półszczytu T_2 . Udar normalny zapisuje się jako $T_1/T_2=1.2/50\mu s$. Inne, różne od normalnego udary piorunowe mogą mieć np. czasy $1.2/5 \mu s$ itp.

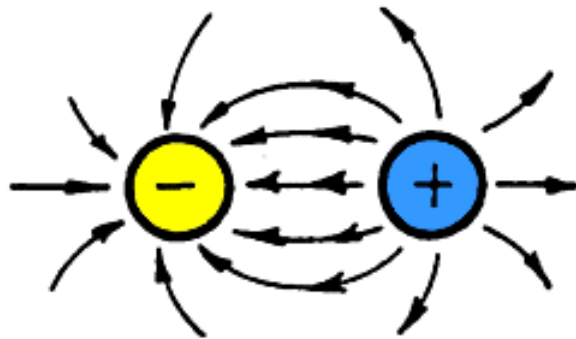
Czasowi $1 \mu s$ odpowiada droga fali udarowej **300 m**, a więc bardzo wielka w porównaniu z wymiarami zwykle rozpatrywanych układów izolacyjnych. Ponieważ prąd upływnościowy jest w polach udarowych zawsze mniejszy niż prądy pojemnościowe, uznaje się więc, że pola te są bardzo bliskie elektrostatycznym, oczywiście jeśli w układzie nie występują wyładowania elektryczne.



3.2. METODY WYZNACZANIA ROZKŁADU POLA

Rozkłady pól elektrycznych można wyznaczyć za pomocą trzech grup metod:

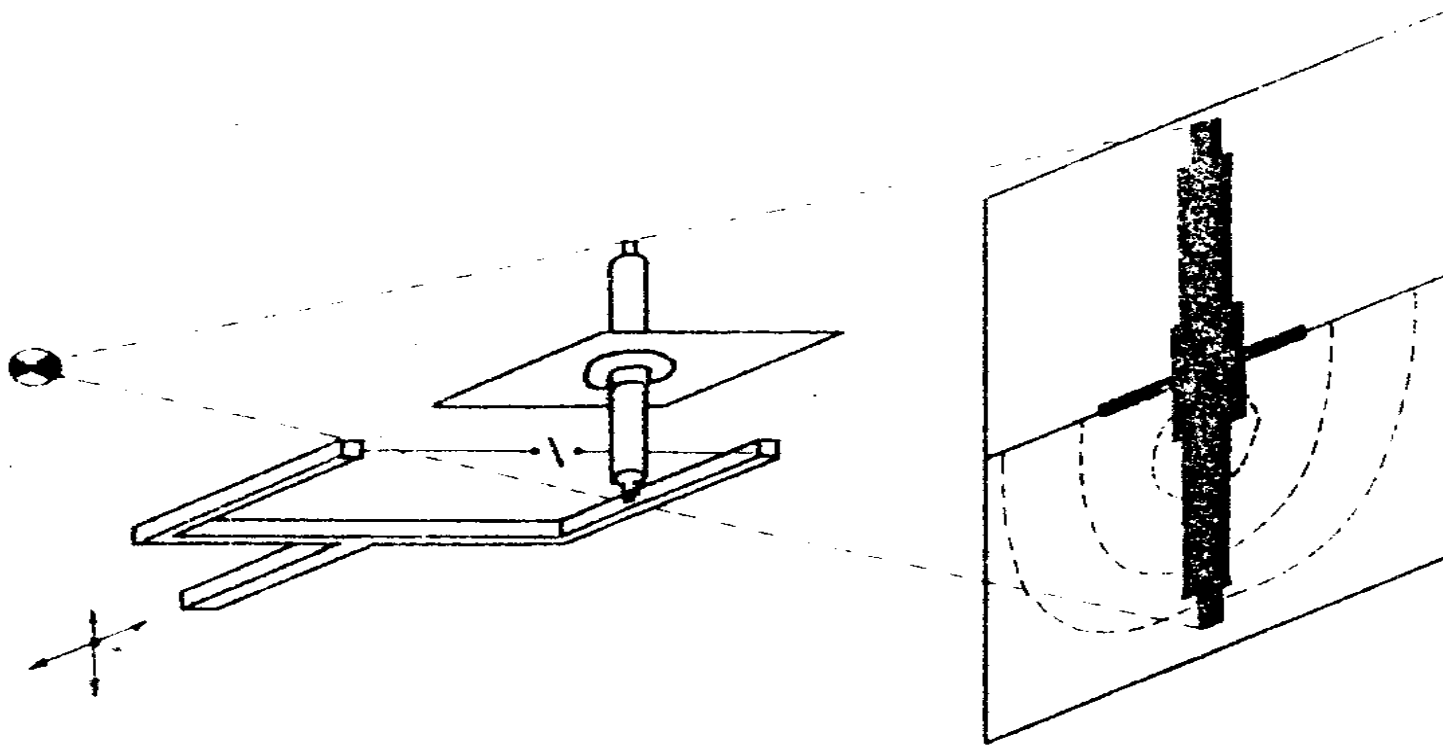
- a) metodami eksperymentalnymi,
- b) metodami analogowymi,
- c) metodami obliczeniowymi.



3.2.1. Metody eksperymentalne

Metody eksperymentalne można sklasyfikować w dwóch grupach jako:

1. Metody pomiarowe wykorzystujące tę właściwość, że element dielektryczny o kształcie wydłużonym np. słomka, polaryzując się w polu elektrycznym orientuje się w kierunku linii sił pola; warunkiem jest, by przenikalność tego pręcika była większa od przenikalności otoczenia (powietrza); zasadę tej metody ilustruje rysunek 3.4;

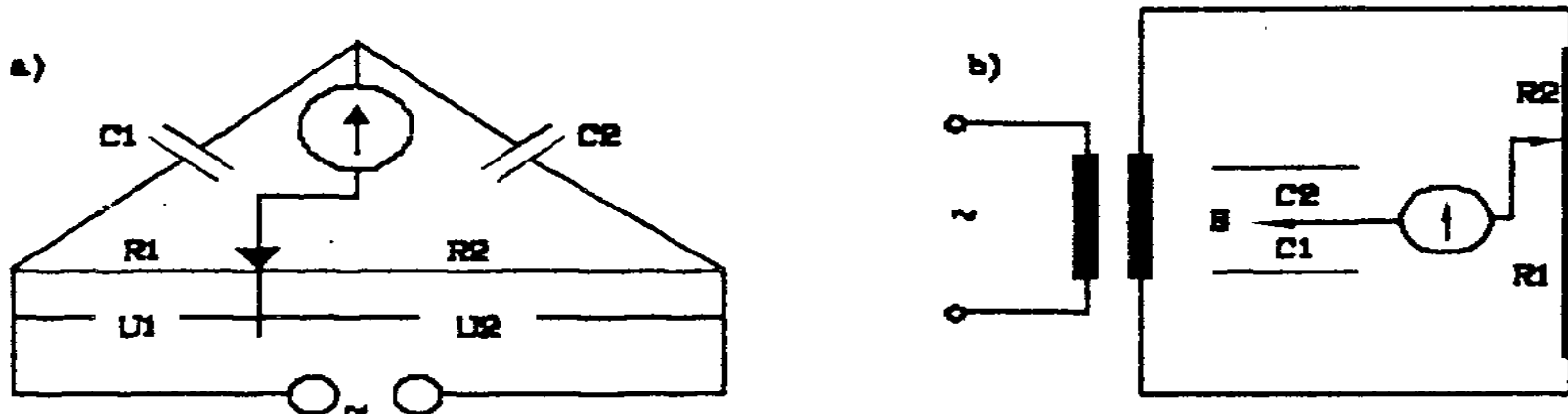


Rys. 3.4. Wyznaczanie obrazu pola elektrycznego metodą Toeplera

2. Metody pomiarowe wykorzystujące sondę pojemnościową współpracującą z mostkiem pojemnościowym w stanie równowagi (rys. 3.5), gdy są spełnione zależności:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad \text{oraz} \quad C_1 \cdot U_1 = C_2 \cdot U_2$$

Znając wartości R_1 , R_2 , U_1 , U_2 oraz całkowite napięcie na elektrodach można zdefiniować i wyznaczyć linie ekwipotencjalne, a tym samym rozkład pola. Stosując układy kompensacyjne można tą metodą uzyskać dużą dokładność.

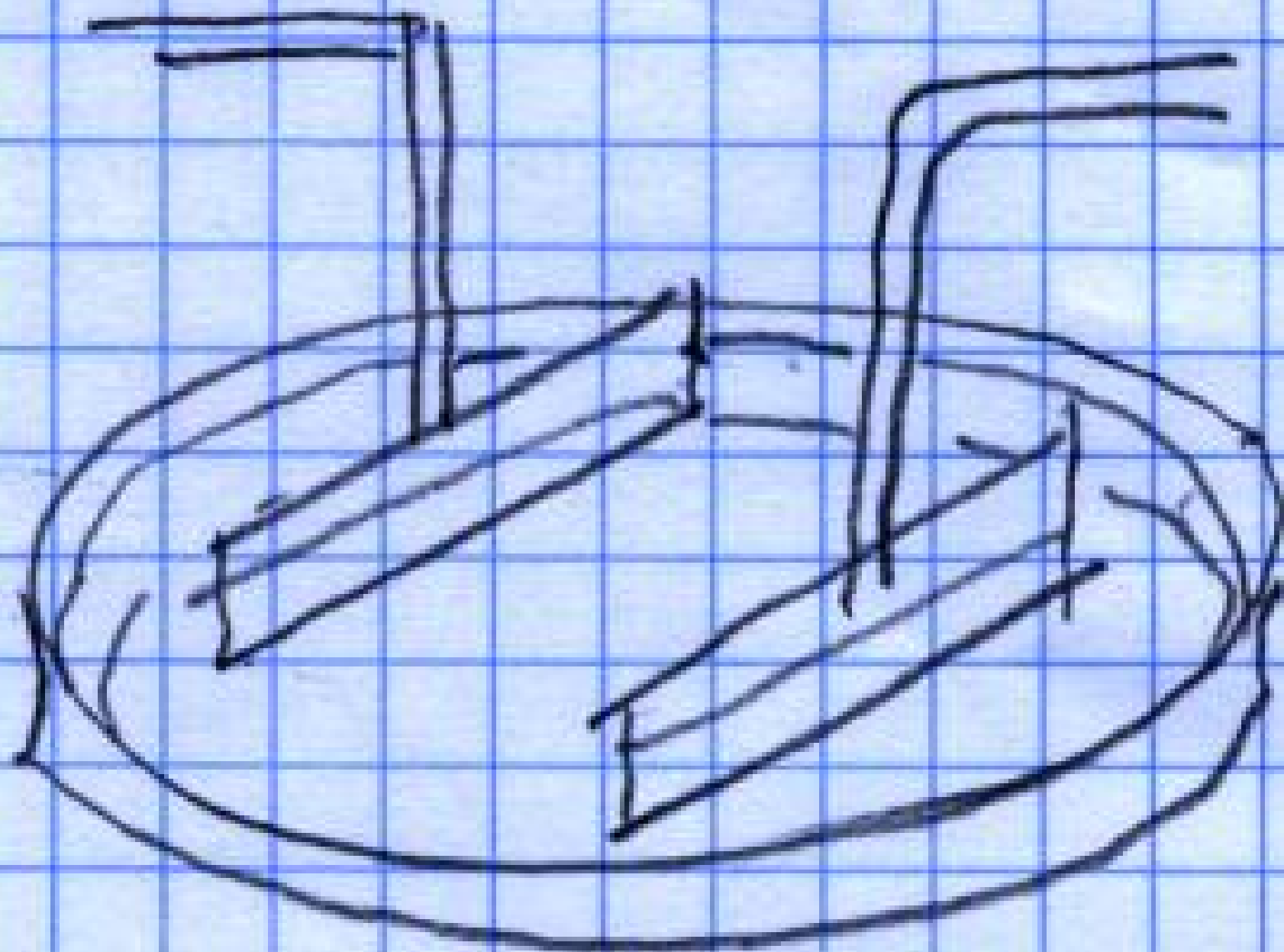


Rys. 3.5. Metoda sondy pojemnościowej: a) zasada, b) układ praktyczny

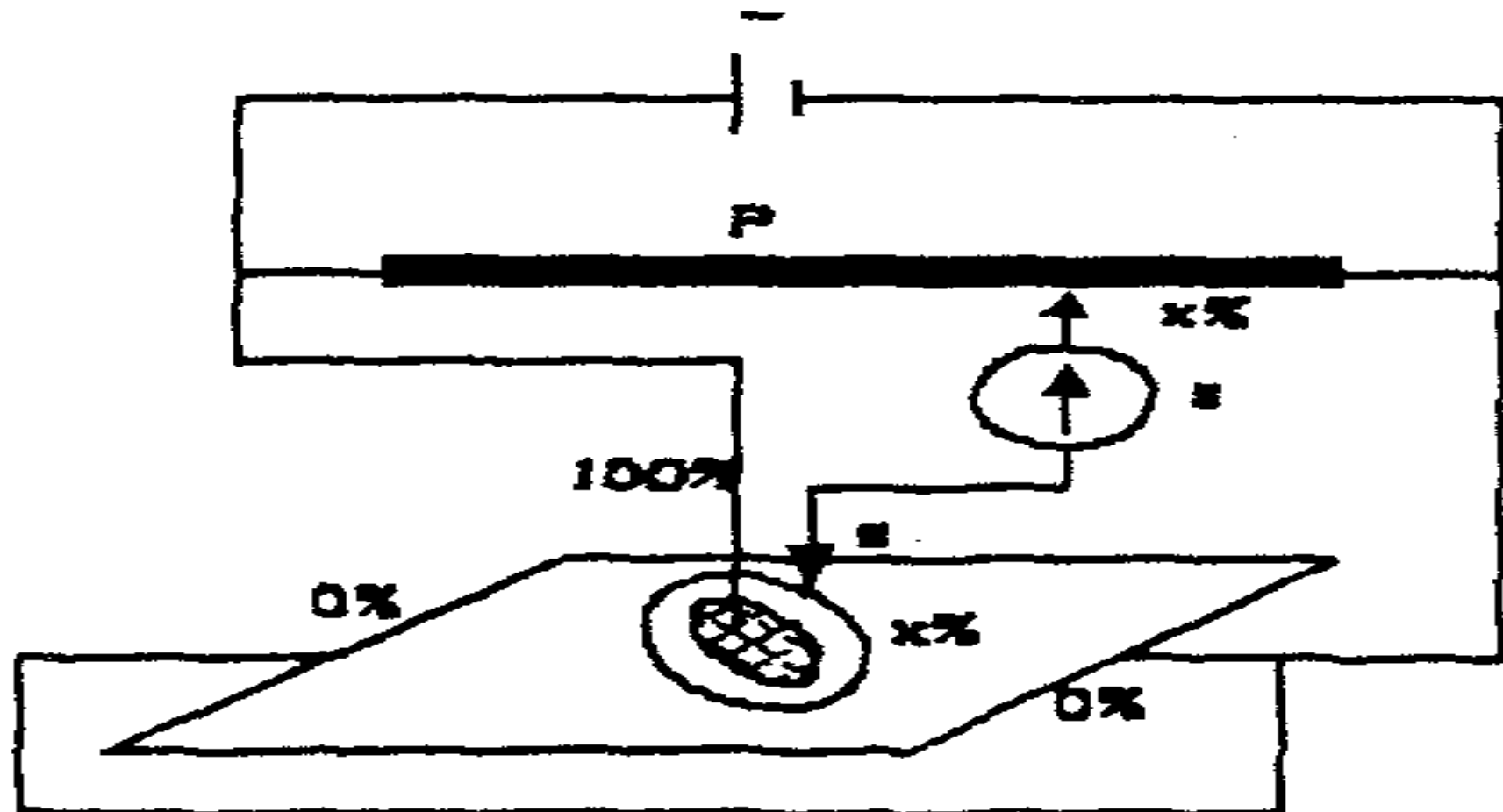
3.2.2. Metody analogowe

Metody te wykorzystują analogie między polem elektrostatycznym i przepływowym. Można tu wyodrębnić dwie najbardziej znane:

1. Metodę wanny elektrolitycznej, wykorzystującą rozływ prądów między elektrodami umieszczonymi w kilkuprocentowym roztworze wodnym soli kuchennej. Współczesne wanny były zwykle w pełni zautomatyzowane, wykreślały samoczynnie rodzinę linii ekwipotencjalnych o zadanych potencjałach, pozwalały na uwzględnienie symetrii obrotowej (przez profilowanie dna wanny) i na uwzględnienie różnic przenikalności elektrycznej w układach uwarstwionych. Była to jednak metoda kosztowna i zanikła na korzyść metody papieru słaboprzewodzącego (teoria obu metod jest taka sama - patrz rys. 3.6), a przede wszystkim na korzyść metod numerycznych;



2. Metodę papieru słaboprzewodzącego (zwaną często, choć niepoprawnie metodą papieru półprzewodzącego) uzyskiwanego przez wymieszanie masy celulozowej z grafitem i sadzą gazową, tak by uzyskać rezystywność powierzchniową rzędu $10^3 \div 10^4$. Na takim papierze przyklejano wycięte z folii metalowej lub malowano farbą przewodzącą figury odpowiadające przekrojom elektrod i podłączano do kilkunastowoltowego źródła napięcia stałego (rys. 3.6). Ustawia się na potencjometrze **P** określoną wartość potencjału ($x\%$) i sondą **S** wyszukuje się na papierze punkty o takim samym potencjale (sygnalizuje to brak wychylenia wskaźnika równowagi mostka). W ten sposób wyznacza się linie ekwipotencjalne. Metoda pozwalała uwzględnić zarówno symetrię obrotową jak i uwarstwienie układu (przez odpowiednie perforowanie lub sklejanie warstw papieru).



Rys. 3.6. Schemat wyznaczania x -procentowej linii ekwipotencjalnej na papierze słaboprzewodzącym [16]

z - wskaźnik równowagi, s - sonda, U - źródło napięcia stałego, p - potencjometr

Obie metody dawały w efekcie rodzinę linii ekwipotencjalnych umożliwiającą określenie natężenia pola \mathbf{K} w wybranym punkcie układu posługując się zależnością:

$$K = -\nabla V \quad (3.10)$$

z której wynika, że średnia wartość natężenia pola \mathbf{K} wzdłuż drogi $\Delta \mathbf{a}$ pokrywającej się z linią sił między sąsiednimi liniami ekwipotencjalnymi V_1 i V_2 wyniesie:

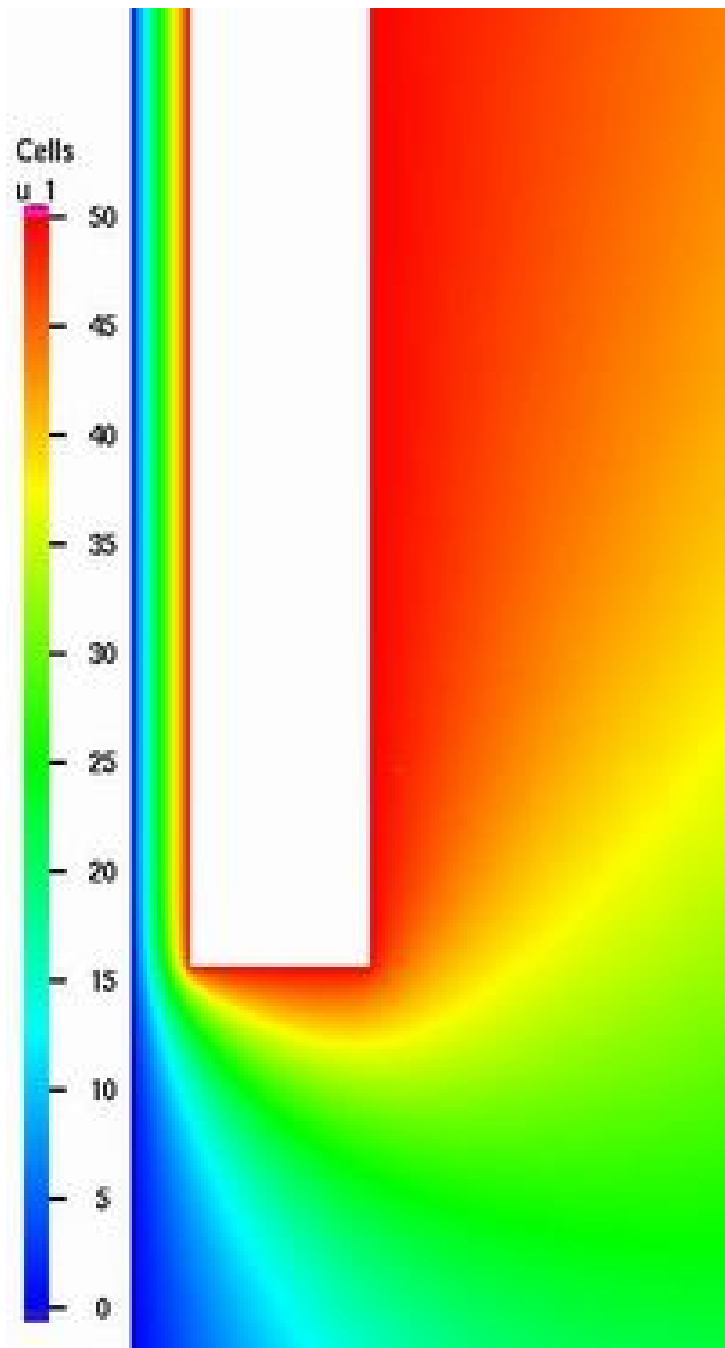
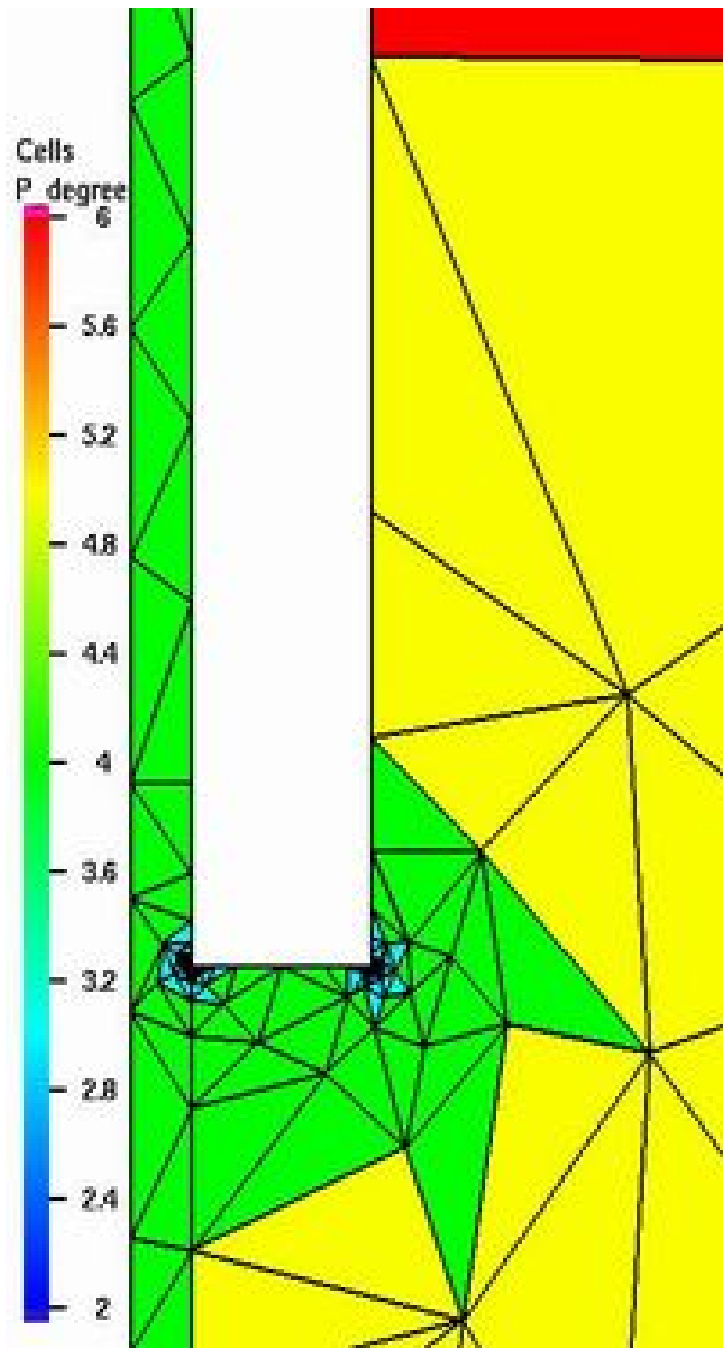
$$K_{\acute{s}r} = \frac{V_1 - V_2}{\Delta a} \quad (3.11)$$

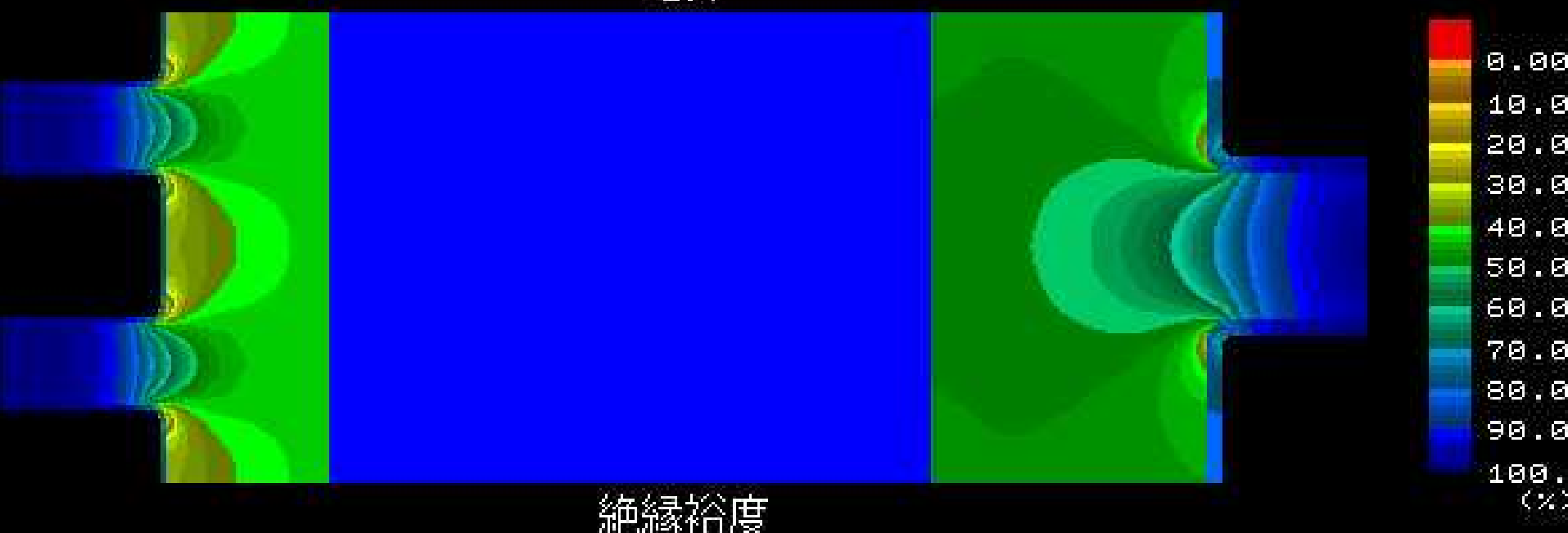
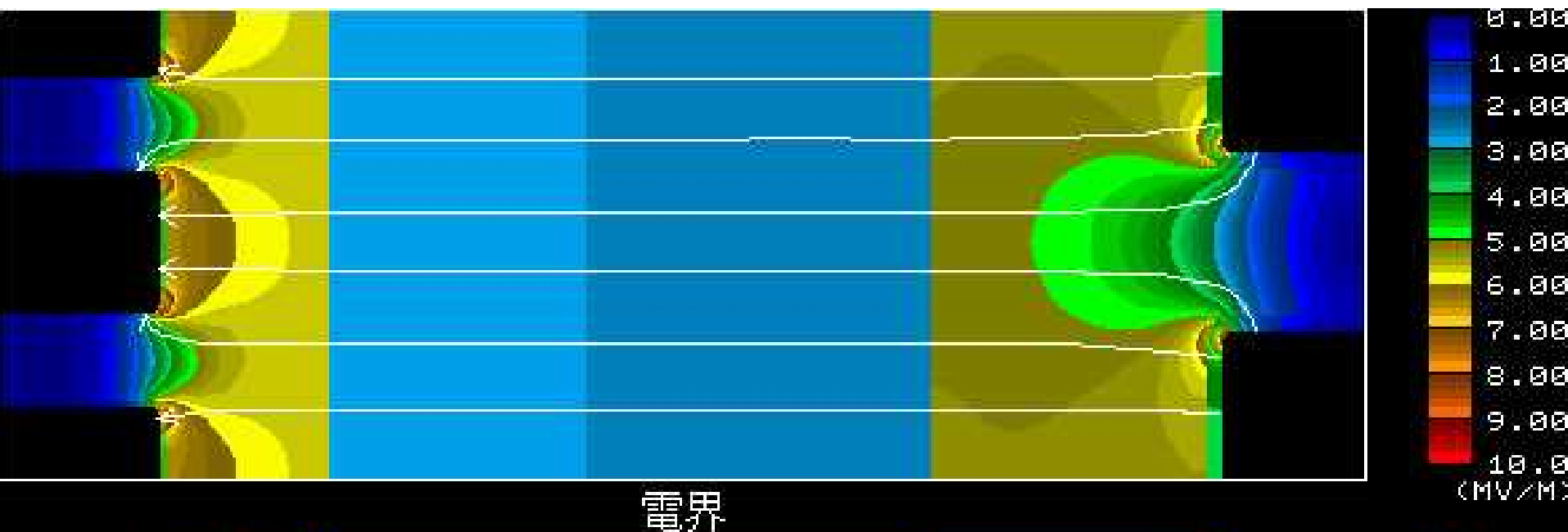
3.2.3. Metody obliczeniowe

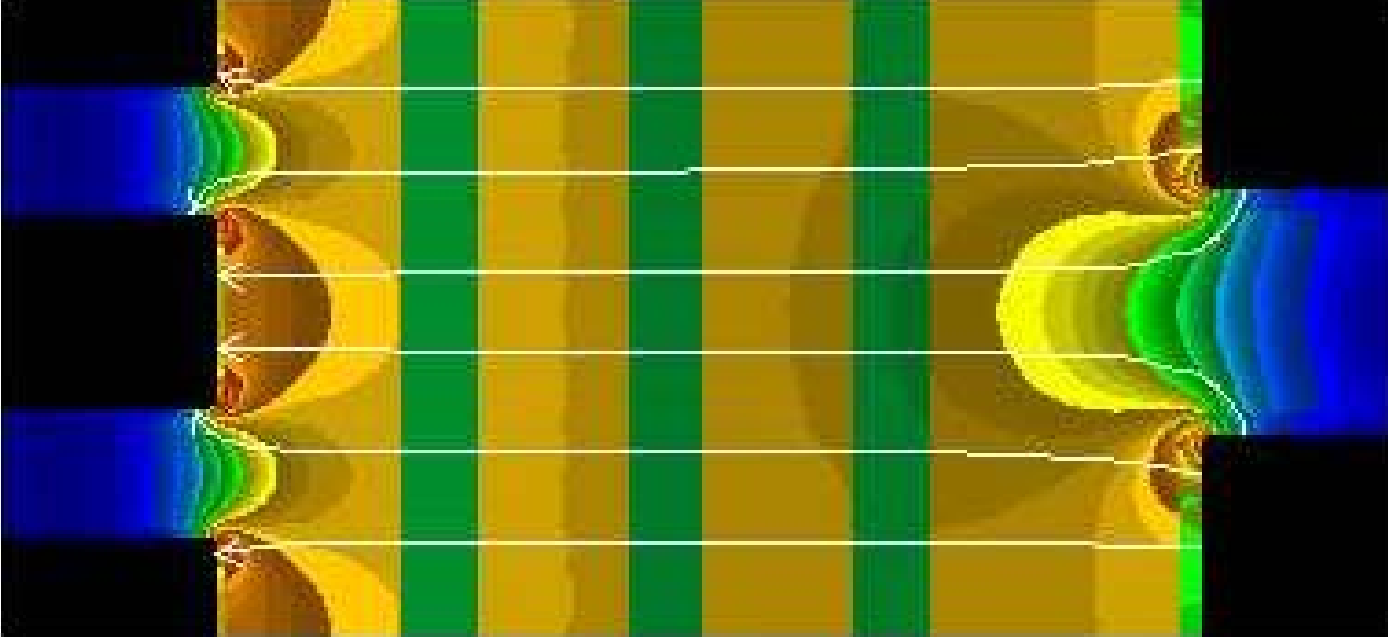
Metody obliczeniowe ogólnie można podzielić na analityczne i numeryczne. Wnioski z zastosowania metod analitycznych, które znajdują zastosowanie tylko w przypadku szczególnych foremnych układów elektrod, będą omówione w następnym rozdziale. Rozwój maszyn cyfrowych spowodował, że również w dziedzinie obliczania rozkładów pól, są to współcześnie metody dominujące ze względu na niski koszt i szybkość obliczeń. Z metod numerycznych na szczególną uwagę zasługują dwie:

- metoda ładunków pozorujących polegająca na symulacji ładunków punktowych, liniowych itd. przy powierzchni elektrod i na powierzchniach granicznych o różnej przenikalności elektrycznej a następnie superpozycji pól od wszystkich ładunków. Miarą dokładności jest zgodność obliczonych napięć na elektrodach z wartościami założonymi. Obliczenia sprowadzają się do rozwiązania układu równań liniowych typu $\sum (p_i \cdot Q_i) = U_i$, gdzie p_i - odpowiednie współczynniki potencjalne;
- metoda elementów skończonych (rys. 3.7), polegająca na podziale badanego obszaru na elementy (np. trójkątne) zwane elementami skończonymi i aproksymowaniu zmiany potencjału wewnątrz elementu odpowiednim wielomianem (w najprostszym i najczęstszym przypadku funkcją liniową). Dokładność metody zależy od gęstości podziału badanego obszaru na elementy oraz od stopnia wielomianu aproksymującego rozkład potencjału wewnątrz pojedynczego elementu. Obliczenia polegają na rozwiązaniu równania Laplace'a wewnątrz układu przy warunkach brzegowych na elektrodach.

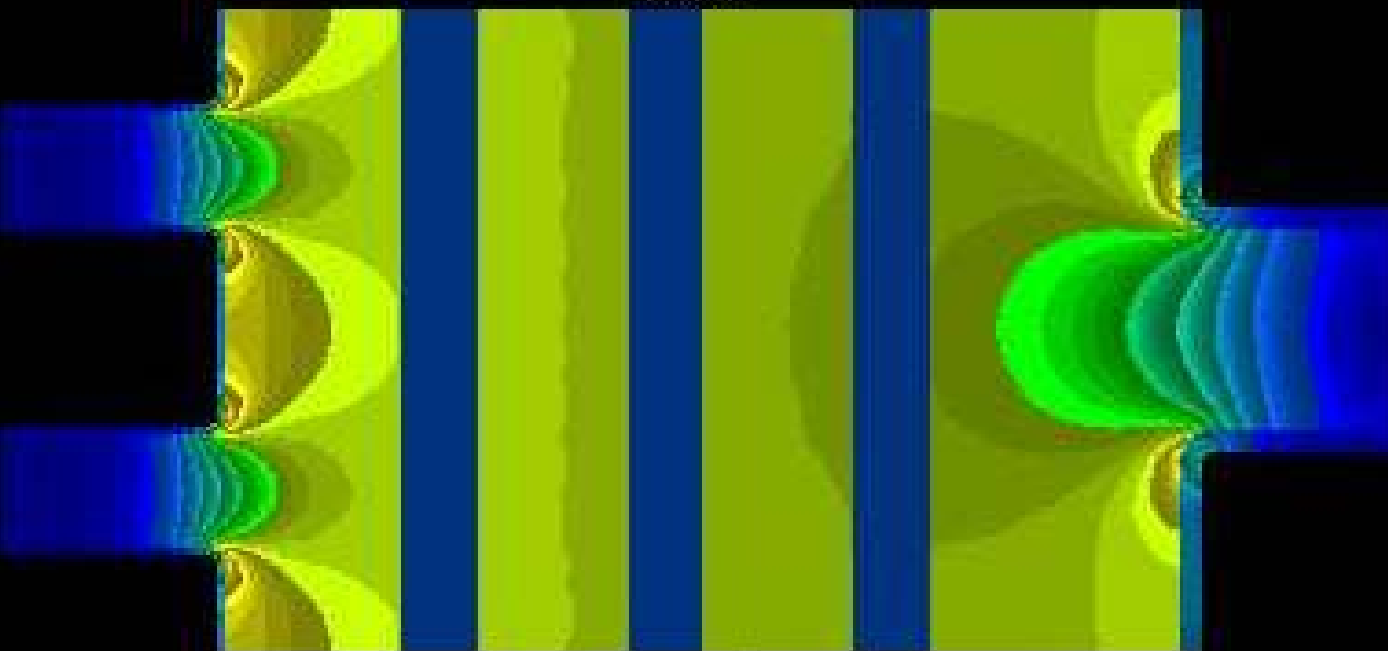
Obie metody sprowadzają się do rozwiązywania układów równań liniowych. Metoda elementów skończonych daje w efekcie rozkład potencjałów i wymaga przy obliczaniu natężenia pola uśredniania na założonym wymiarze elementu skończonego. Metoda ładunków pozorujących pozwala obliczyć natężenie pola w obranym punkcie obszaru.



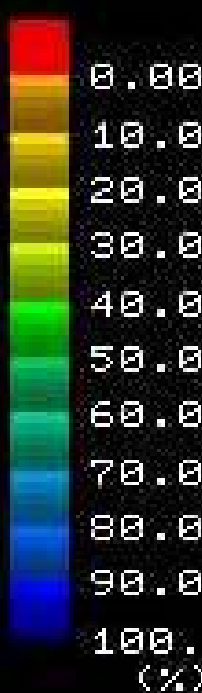




電界



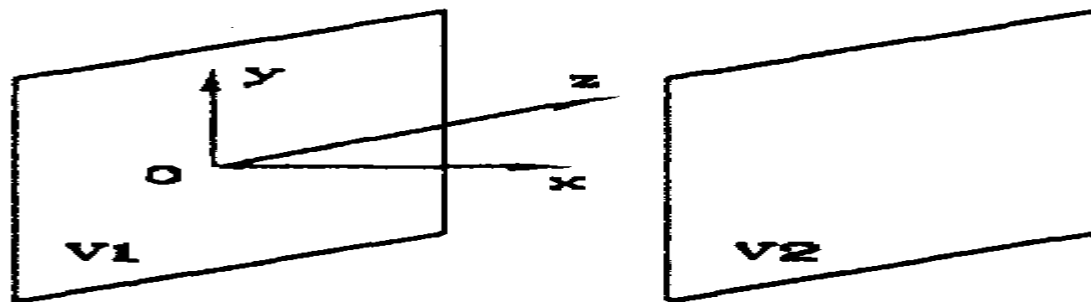
絶縁裕度



3.3. PRZYKŁADY PÓŁ OBLICZANYCH ANALITYCZNIE

3.3.1. Układy o polu jednorodnym

Największe natężenia pola elektrycznego w układach izolacyjnych jednorodnych (czyli w układach z jednym dielektrykiem) występują przy powierzchni elektrod i są tym większe im większa jest krzywizna elektrod (przy danej wartości napięcia) czyli im mniejszy jest promień zaokrąglenia elektrod.



Rys. 3.8. Przestrzenny układ współrzędnych prostokątnych w płaskim układzie elektrod

Najkorzystniejszym układem elektrod, zapewniającym przy danym napięciu U najmniejszą wartość natężenia pola \mathbf{K} lub największą wytrzymałość elektryczną przy rosnącym U , jest układ elektrod płaskich, dla którego równanie Laplace'a ma postać:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \quad (3.12a)$$

stąd po dwukrotnym scałkowaniu:

$$V = A_1 \cdot x + A_2 \quad (3.12b)$$

gdzie V jest potencjałem występującym w odległości x od elektrody o potencjale V_1 (rys. 3.8). Przyjmując $V = V_1$ dla $x = 0$ oraz $V = V_2$ dla $x = a$, gdzie a - jest odstępem elektrod uzyskuje się:

$$V_1 = A_2$$

oraz $V_2 = A_1 \cdot a + V_1$

skąd $A_1 = \frac{V_2 - V_1}{a}$

i stąd $V = \frac{V_2 - V_1}{a} \cdot x + V_1$ lub $V = -\frac{U}{a} \cdot x + V_1$ (3.13)

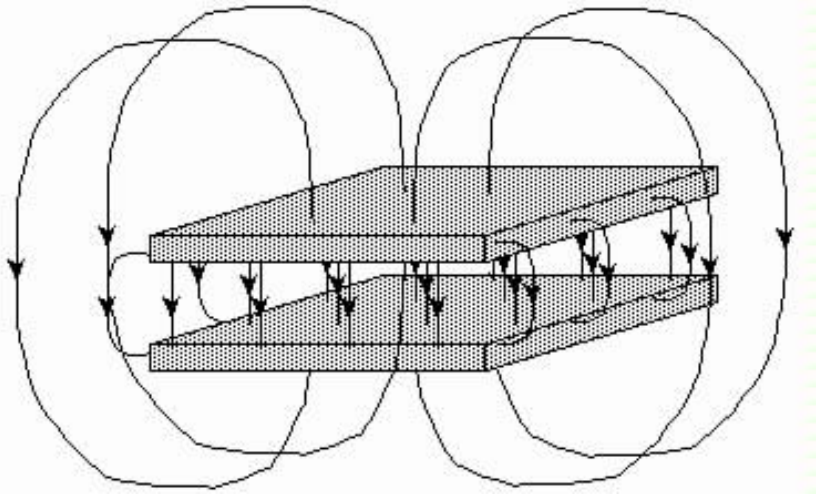
gdzie $U = V_1 - V_2$

Ponieważ $K = -\frac{\partial V}{\partial x}$ czyli $K = \frac{U}{a}$ (3.14)

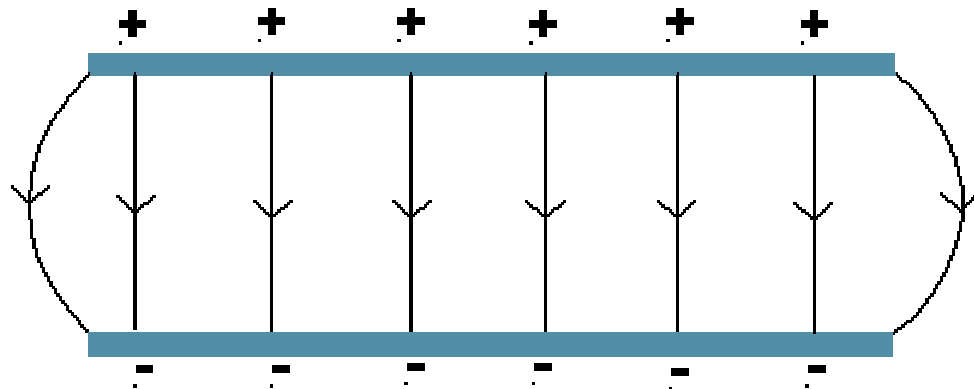
czyli natężenie pola elektrycznego w układzie płaskim ma wartość stałą, jednakową w każdym punkcie układu i równą ilorazowi napięcia do odległości elektrod.

Niestety, ten najkorzystniejszy układ elektrod jest jednocześnie niemożliwy do praktycznego zrealizowania. Trudno, bowiem wyobrazić sobie dwie płaskie elektrody o wymiarach nieskończenie rozległych płaszczyzn, a na zakończeniach płaskich elektrod występują już tzw. efekty krawędziowe polegające na zagęszczeniu linii sił pola elektrycznego, co w konsekwencji prowadzi do wzrostu natężenia pola. Tym niemniej przy konstruowaniu układów izolacji wysokonapięciowej należy w miarę możliwości dążyć do tego, by pole elektryczne było jak najbardziej zbliżone do pola w układzie płaskim, czyli aby było jak najbardziej równomierne.

http://maxwell.ucdavis.edu/~electro/dc_circuits/images/cap_fields.jpg



http://webs.mn.catholic.edu.au/physics/emery/prelim_electrical.htm#Efields



(c) Electric field between two parallel charged plates

Wszystkie inne niż płaski układy elektrod mają natężenie pola elektrycznego różne w różnych punktach obszaru międzyelektrodowego, a natężenie maksymalne w układzie \mathbf{K}_m jest większe niż natężenie \mathbf{K} w układzie płaskim przy tej samej odległości elektrod i takim samym napięciu. Właściwość tę charakteryzuje tzw. współczynnik wykorzystania układu izolacyjnego η równy:

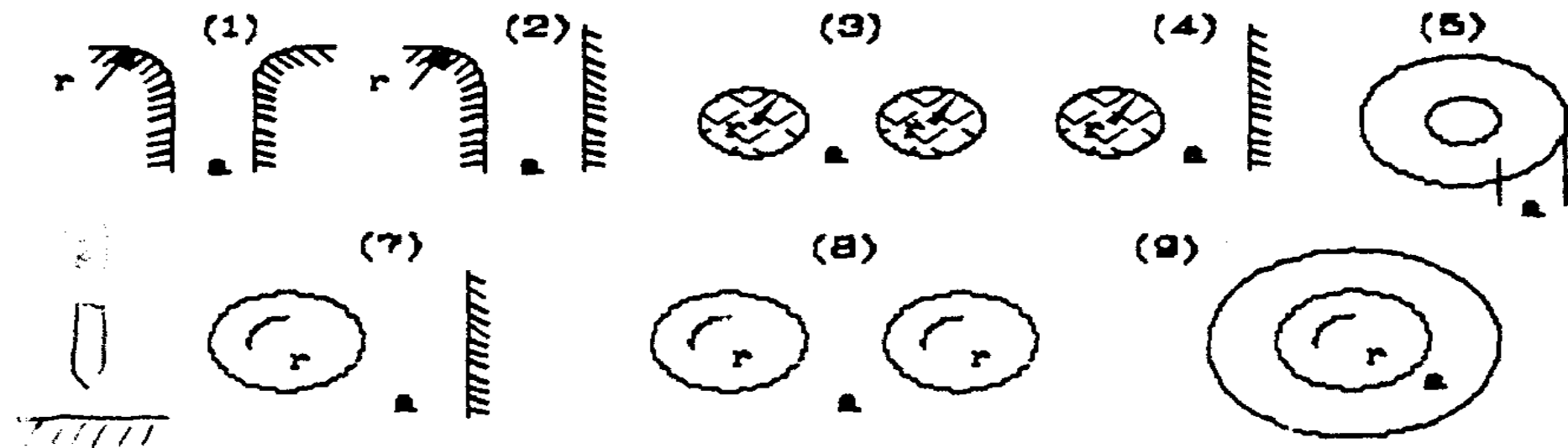
$$\eta = \frac{\frac{U}{a}}{K_m} \quad (3.15)$$

lub jego odwrotność zwana współczynnikiem nierównomierności pola;

$$\frac{1}{\eta} = \frac{K_m}{\frac{U}{a}} \quad (3.16)$$

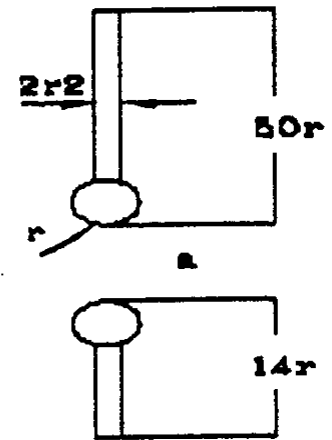
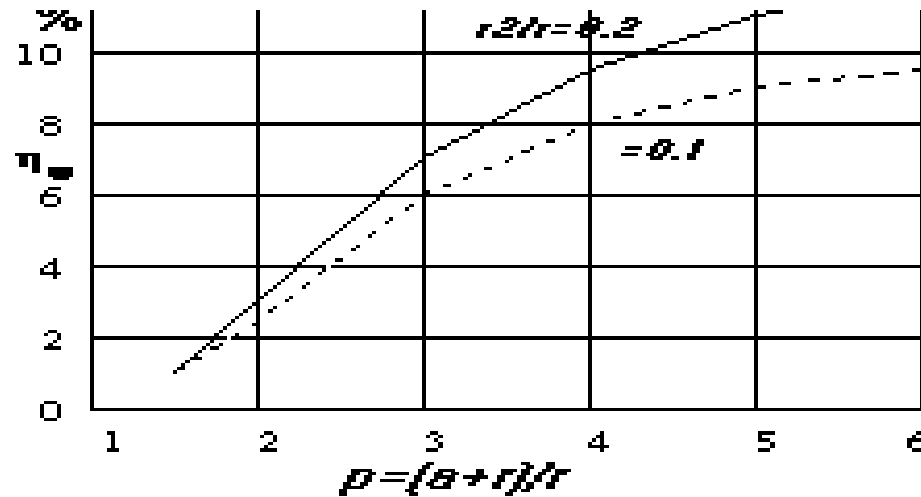
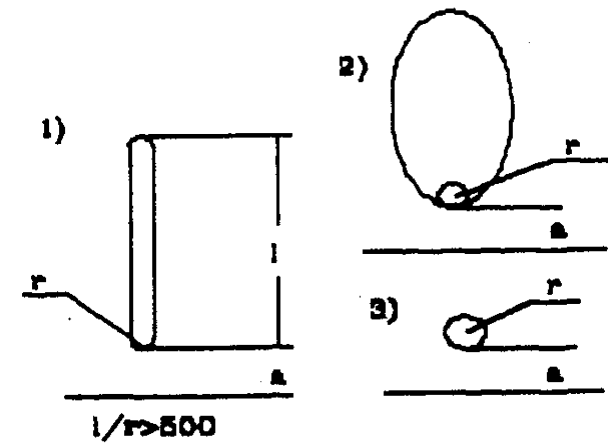
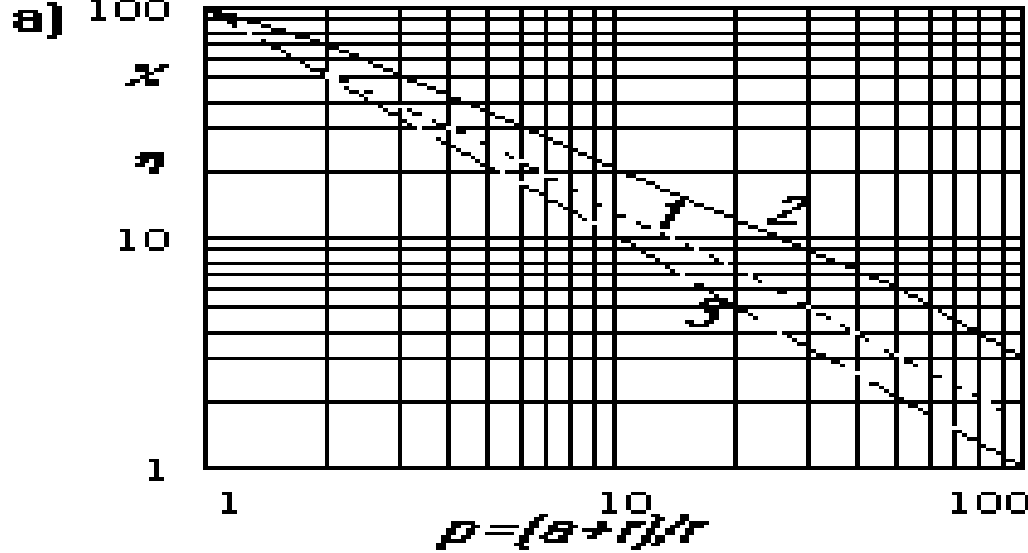
Współczynnik η jest podawany dla podstawowych foremnych układów elektrod w postaci wykresów w funkcji tzw. współczynnika geometrii układu elektrod $p = \frac{a+r}{r}$, gdzie a - odstęp elektrod, r - najmniejszy promień zaokrąglenia w układzie.

Gdyby uszeregować najczęściej spotykane układy elektrod w funkcji malejącego współczynnika wykorzystania układu to uzyska się szereg jak na rysunku 3.10.



Rys. 3.10. Uszeregowanie układów foremnych według malejącego współczynnika wykorzystania układu

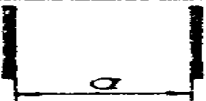


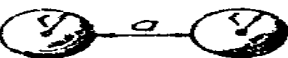






Przykłady zależności $\eta = f(p)$ podano na rysunku 3.9.



Rys. 3.9. Przykłady współczynników wykorzystania układów izolacyjnych η w funkcji współczynnika geometrii układu 'p': a) układy pręt-płyta (1), hiperboloida obrotowa-płyta (2), kula-płyta (3); b) układy kula-kula: $\eta_w = (\eta_1 - \eta_2) / \eta_2$; η_1 - kule zawieszone na prętach, η_2 - kule samotne.

Jak już wspomniano, dla podstawowych foremnych układów elektrod istnieją wykresy $\eta = f(p)$ i, jeśli są dostępne, najwygodniej jest korzystać z tych wykresów. Tym niemniej istnieją również tablice zestawiające, uzyskane analitycznie wzory, służące do obliczania maksymalnych natężeń pola w wybranych układach foremnych. Przykład takiego zestawienia zawiera tabela 1. Wzory zawarte w tabeli 1 są wzorami przybliżonymi.

Maksymalne natężenia pola elektrycznego dla prostych układów elektrod.

UKŁAD ELEKTROD	SZKIC	WZÓR NA MAKSYMALNE NATĘŻENIE POLA	
układ płaski		$\frac{U}{a}$	
kule współosiowe		$\frac{U}{a} \cdot \frac{r+a}{r}$	
kula-płyta		$0,9 \frac{U}{a} \cdot \frac{r+a}{r}$ $a \gg r$	
kula-kula		$0,9 \frac{U}{a} \cdot \frac{r+a}{r}$ $a \gg r$	
walce współosiowe		$\frac{U}{r \ln \frac{r+a}{r}}$	
walec-płyta*		$0,9 \frac{U}{r \ln \frac{r+a}{r}}$ $a \gg r$	$\frac{U}{r \frac{a}{a+r} \ln 2 \frac{(a+r)}{r}}$ $a > 2r$
walce równoległe*		$0,9 \frac{U/2}{r \ln \frac{r+a/2}{r}}$ $a \gg r$	$\frac{U/2}{r \frac{a}{a+2r} \ln \frac{a+2r}{r}}$ $a > 4r$
walce prostopadłe do siebie		$0,9 \frac{U/2}{r \ln \frac{r+a/2}{r}}$	
połkula na płaszczyźnie-płaszczyzna		$3 \frac{U}{a};$ $(a \gg r)$	
połwalec na płaszczyźnie-płaszczyzna		$2 \frac{U}{a};$ $(a \gg r)$	

O stopniu złożoności dokładnych rozwiązań analitycznych świadczą podane niżej przykłady dla trzech wybranych układów walcowych.

1. Układ dwóch walców mimoosiowych o takich samych promieniach r :

$$K_m = \frac{U/2}{r \cdot \sqrt{\frac{a}{a+4 \cdot r}} \cdot \ln \left[1 + \frac{a}{2 \cdot r} + \sqrt{\frac{a}{r} \cdot \left(1 + \frac{a}{4 \cdot r} \right)} \right]} \quad (3.17)$$

2. Układ walec o promieniu **r** – **płyta**:

$$K_m = \frac{U}{r \cdot \sqrt{\frac{a}{a+2 \cdot r}} \cdot \ln \left[1 + \frac{a}{r} + \sqrt{\frac{a}{r} \cdot \left(2 + \frac{a}{r} \right)} \right]} \quad (3.18)$$

3. Układ dwóch walców mimoosiowych o różnych promieniach r i R :

$$K_m = \frac{U}{r \cdot \sqrt{\frac{a + (a + 2 \cdot R)}{4 \cdot r + (r + R) + a \cdot (a + 2 \cdot R + 4 \cdot r)}} \cdot \ln \left[\frac{(a + 2 \cdot r) \cdot (a + 2 \cdot R) + \sqrt{m}}{(a + 2 \cdot r) \cdot (a + 2 \cdot R) - \sqrt{m}} \right]} \quad (3.19)$$

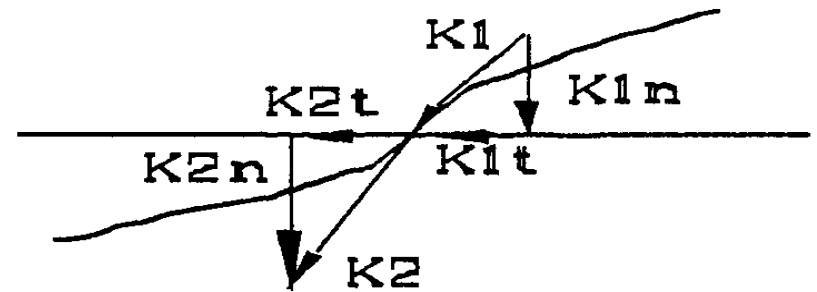
gdzie $m = \left[(a + r + R)^2 - r^2 - R^2 \right] - 4 \cdot r^2 \cdot R^2$

Posługując się zależnościami z tabeli 4 można zwykle oszacować wartości maksymalnych natężeń pola w rzeczywistym układzie izolacyjnym, dobierając odpowiedni układ foremny, najbardziej podobny do rozważanego.

3.3.2. Układy uwarstwione

3.3.2.1. Wstęp

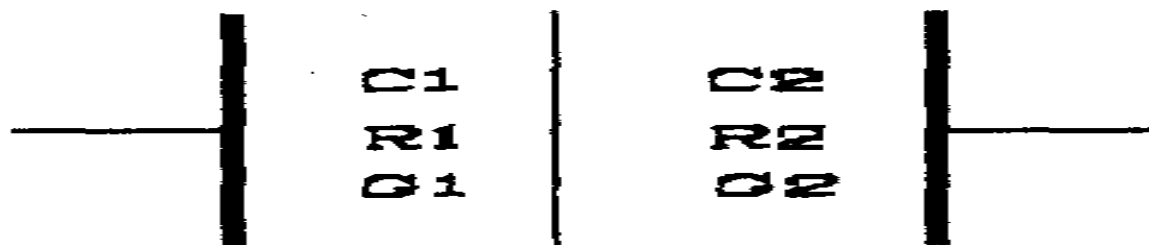
Jeżeli dwa dielektryki o przenikalnościach elektrycznych ϵ_1 i ϵ_2 sąsiadujące ze sobą, znajdują się w polu elektrycznym, to na granicy ośrodków występuje załamanie linii sił pola (rys. 3.11). Jak wynika z praw elektrostatyki składowe styczne natężenia pola są na granicy ośrodków równe sobie, czyli $\mathbf{K}_{1t} = \mathbf{K}_{2t}$, natomiast składowe normalne są odwrotnie proporcjonalne do przenikalności elektrycznych tych ośrodków



$$\frac{K_{1n}}{K_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{\epsilon_2'}{\epsilon_1'} \quad (3.20)$$

3.3.2.2. Układ płaski uwarstwiony szeregowo

Przez szeregowe uwarstwienie dielektryków (rys. 3.12) rozumie się takie uwarstwienie, gdy powierzchnia graniczna pomiędzy ośrodkami izolacyjnymi jest powierzchnią ekwipotencjalną.



Rys. 3.12. Układ płaski uwarstwiony szeregowo

W przypadku układu płaskiego występują wówczas warunki

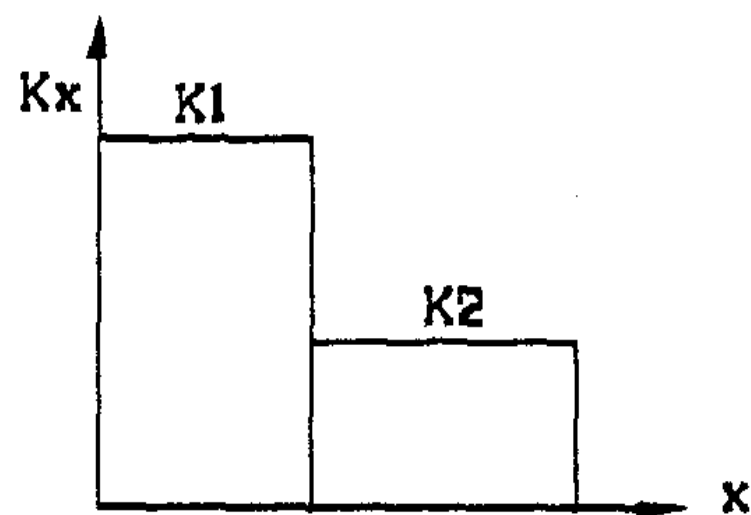
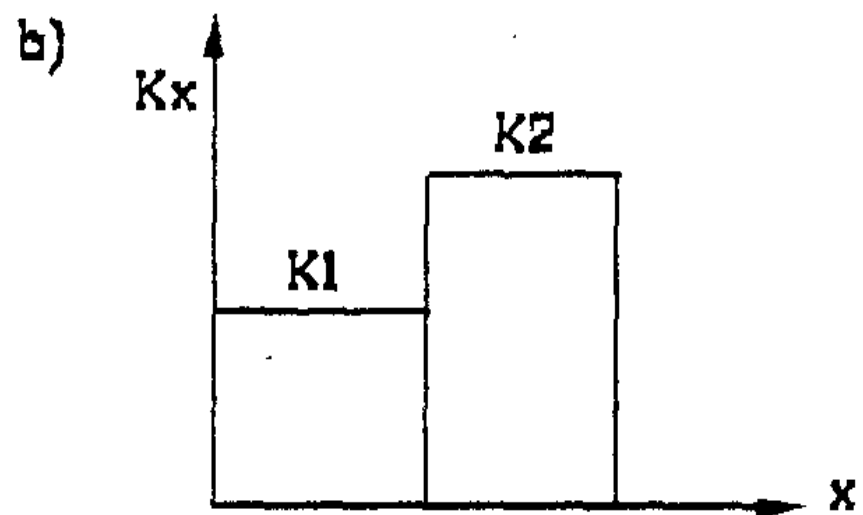
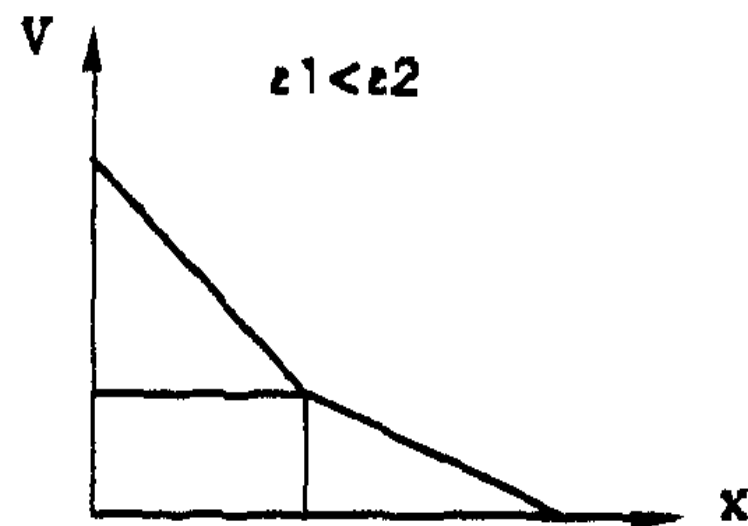
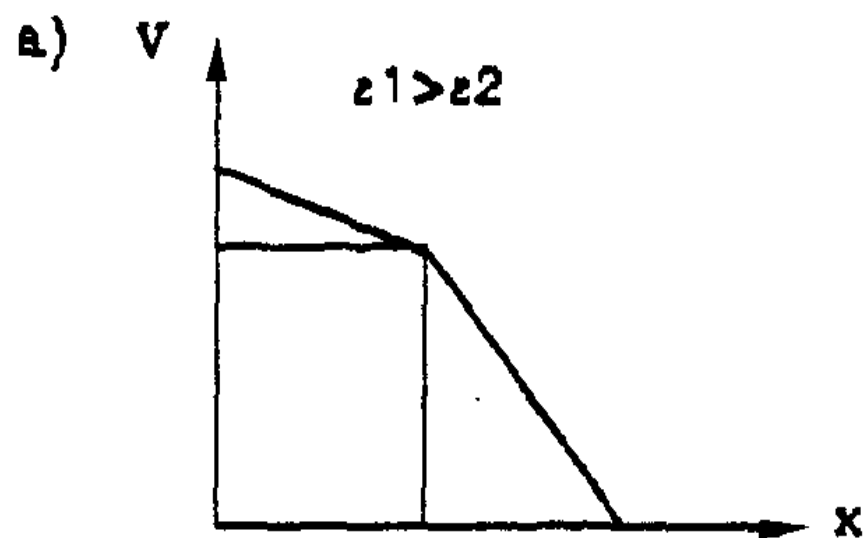
$$\left. \begin{aligned} K_{1t} &= K_{2t} = 0 \\ \frac{K_{1n}}{K_{2n}} &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon'_2}{\varepsilon'_1} \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Ponieważ napięcie wyraża się wzorem

$$U = \int K_x \cdot dx = K_1 \cdot a_1 + K_2 \cdot a_2 \quad (3.22)$$

to po prostych przekształceniach uzyskuje się zależności na natężenia pola w poszczególnych warstwach (rys. 3.13)

$$K_1 = \frac{U \cdot \varepsilon_2'}{\varepsilon_2' \cdot a_1 + \varepsilon_1' \cdot a_2} \quad \text{oraz} \quad K_2 = \frac{U \cdot \varepsilon_1'}{\varepsilon_2' \cdot a_1 + \varepsilon_1' \cdot a_2} \quad (3.23)$$



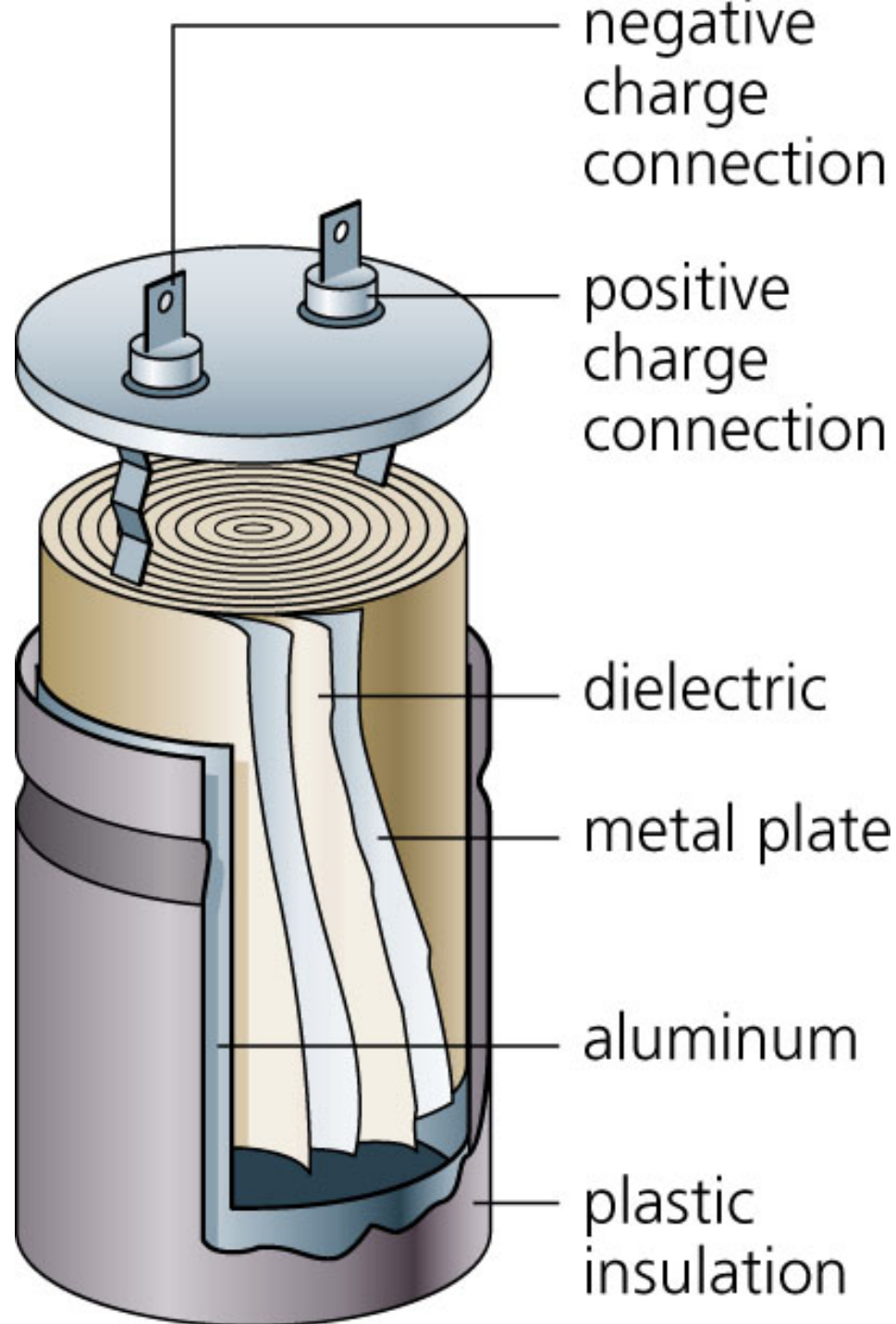
Rys. 3.13. Układ płaski uwarstwiony szeregowo: a) rozkład napięć, b) rozkład natężeń pola elektrycznego

Zatem jeśli rozpatruje się uwarstwienie dwoma dielektrykami o znacznie różnych przenikalnościach elektrycznych np. powietrze $\epsilon' \approx 1$ i szkło $\epsilon' \approx 6$ to natężenie pola w powietrzu będzie znacznie większe (6-krotnie) niż w szkłe, a co gorsza wytrzymałość elektryczna powietrza jest znacznie mniejsza niż szkła. Należy, zatem unikać układów izolacyjnych uwarstwionych dielektrykami o bardzo różniących się przenikalnościach elektrycznych. Uwarstwienie może nawet stwarzać zaskakująco paradoksalne sytuacje. Przykładowo, jeśli do układu płaskiego w powietrzu włożyć płytę z dielektryka stałego to natężenie pola w powietrzu mocno wzrośnie i może przekroczyć wartość progową, powyżej której w warstwie powietrznej wystąpi przeskok, mimo iż bez dielektryka stałego był wystarczający zapas wytrzymałości i w układzie nic szczególnego się nie działo.

Wzór ogólny na natężenie pola elektrycznego w i-tej warstwie układu płaskiego o więcej niż dwóch warstwach, o różnych przenikalnościach elektrycznych ma postać:

$$K_i = \frac{U}{\varepsilon'_i \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon'_1} \cdot a_1 + \frac{1}{\varepsilon'_2} \cdot a_2 + \dots + \frac{1}{\varepsilon'_i} \cdot a_i + \dots + \frac{1}{\varepsilon'_n} \cdot a_n \right)} \quad (3.24)$$

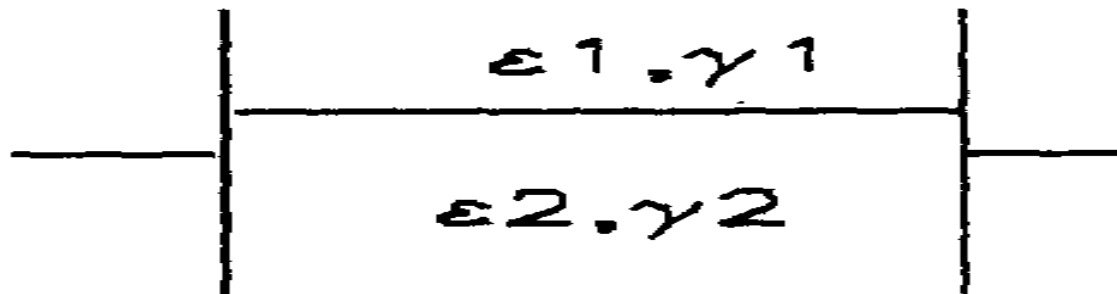
Układ płaski uwarstwiony szeregowo występuje w czystej postaci w nowoczesnych kondensatorach energetycznych z dielektrykiem uwarstwionym np. złożonym na przemian z warstwy papieru przesyczonego olejem i folii syntetycznej (np. polipropylenowej).



3.3.2.3. Układ płaski uwarstwiony równolegle

Przez równoległe uwarstwienie dielektryków (rys. 3.14) rozumie się takie ich zestawienie, przy którym powierzchnia graniczna między ośrodkami izolacyjnymi jest prostopadła do powierzchni ekwipotencjalnych. Wówczas $K_{1n} = K_{2n} = 0$ oraz $K_{1t} = K_{2t} = K$, czyli natężenia pola elektrycznego w obu dielektrykach są sobie równe i wynoszą U/a .

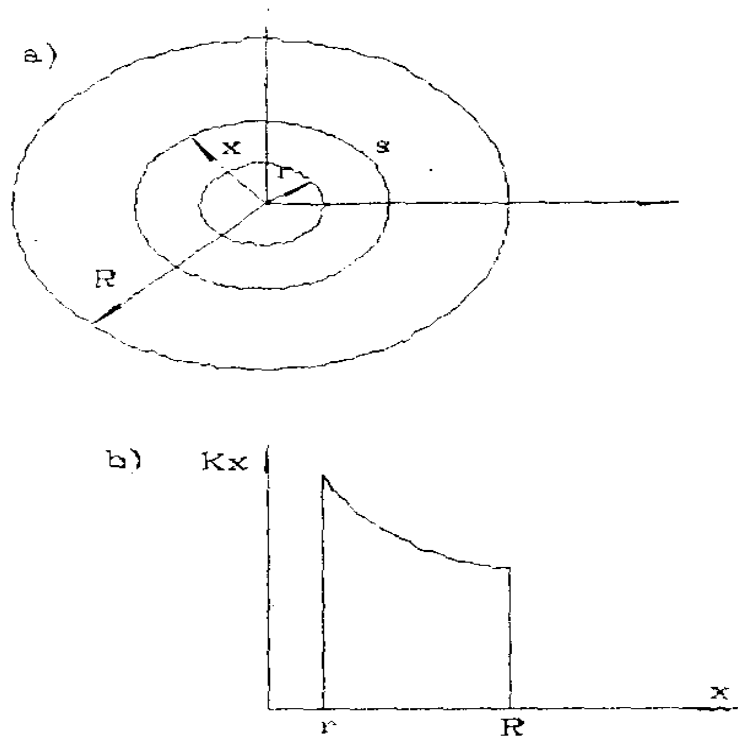
Typowymi przypadkami uwarstwienia równoległego są wszelkiego rodzaju wsporniki i przekładki izolacyjne. Należy zaznaczyć, że wówczas zawsze słabszym elektrycznie jest otoczenie przekładki, a natężenia pola są jednakowe. Zatem wyładowania elektryczne zachodzą po powierzchni przekładki.



Rys. 3.14. Układ płaski uwarstwiony równoległy

3.3.2.4. Układ walców współosiowych

Zakładając, że długość układu walców współosiowych l jest większa niż dwukrotna wartość promienia walca zewnętrznego R , rozważono przekrój środkowej części układu (rys. 3.15a). Warunek o odpowiedniej długości rozważanego układu pozwala pominąć zjawiska na zakończeniach walców.



Rys 3.15. Układ walców współosiowych: a) przekrój, b) rozkład natężenia pola elektrycznego wzdłuż promienia

Zgodnie z prawem Gaussa strumień dielektryczny przenikający przez dowolną powierzchnię zamkniętą jest równy ładunkowi znajdującemu się wewnątrz tej powierzchni. Stąd dla powierzchni walcowej s o promieniu x obejmującej walec wewnętrzny obowiązują zależności:

$$\int_s D \cdot ds = Q$$

a ponieważ $D = \varepsilon \cdot K$

stąd mamy $\int_s K \cdot ds = \frac{Q}{\varepsilon}$ (3.25)

Nateżenie pola na promieniu \mathbf{x} , które oznaczono jako \mathbf{K}_x , nie zależy od miejsca na powierzchni s i w każdym jej punkcie jest takie samo, zatem

$$\int_s K_x \cdot ds = \frac{Q}{\varepsilon}$$

stąd

$$K_x = \frac{Q}{\varepsilon \cdot \int_s ds} = \frac{Q}{\varepsilon \cdot s} = \frac{Q}{2 \cdot \varepsilon \cdot \pi \cdot x \cdot l} \quad (3.26)$$

gdzie: Q - ładunek, l – długość walca.

Ponieważ dla napięcia obowiązuje zależność:

$$U = \int_r^R K_x \cdot dx$$

zatem

$$U = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot l} \cdot \int \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot l} \cdot \ln\left(\frac{R}{r}\right) \quad (3.27)$$

Stąd można wyznaczyć wartość pojemności układu oraz ładunek:

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{Q}{U} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot l}{\ln\left(\frac{R}{r}\right)} \\ Q &= \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot l \cdot U}{\ln\left(\frac{R}{r}\right)} \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

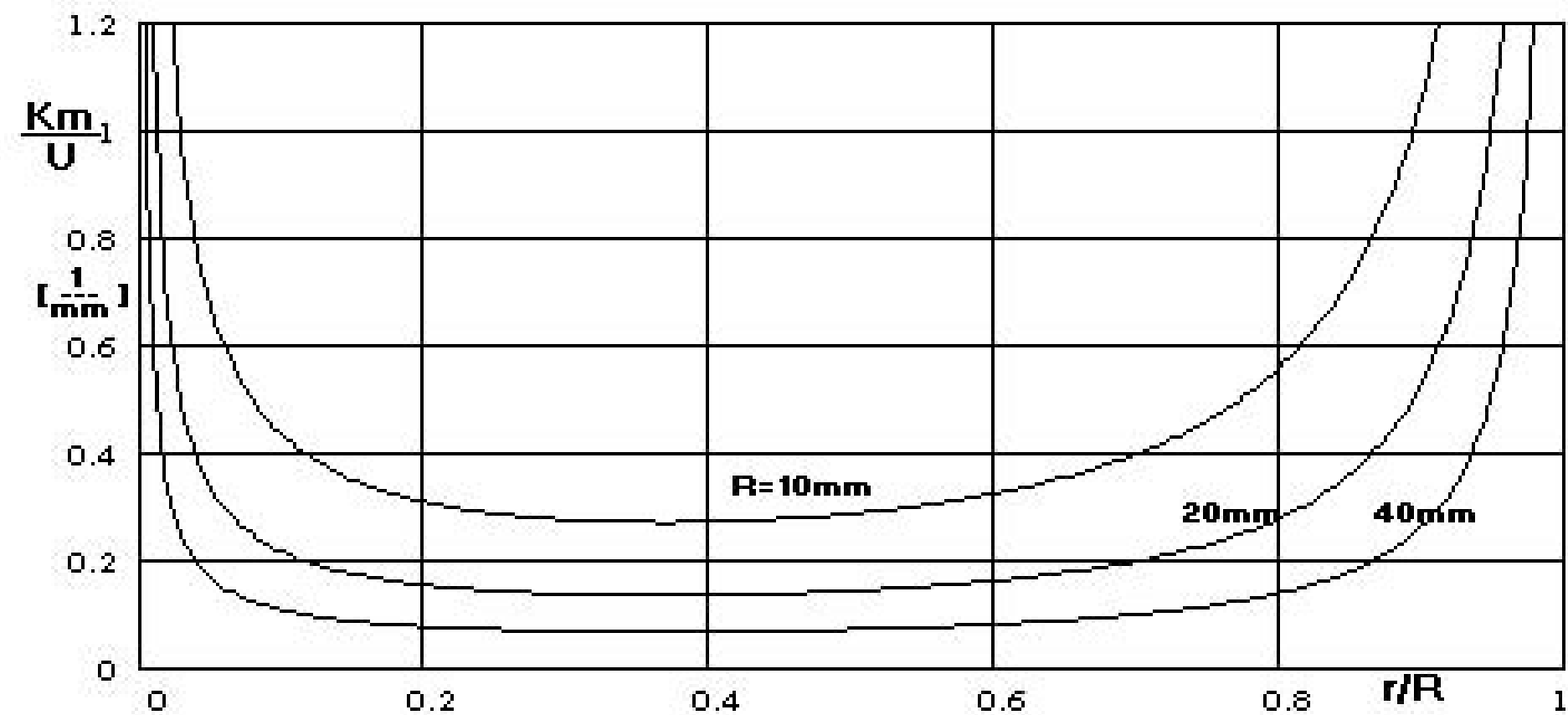
Z układu równań na ładunek (3.28) i natężenie pola (3.26) można znaleźć wyrażenie uzależniające natężenie \mathbf{K}_x jedynie od napięcia i wymiarów geometrycznych:

$$K_x = \frac{U}{x \cdot \ln\left(\frac{R}{r}\right)} \quad (3.29)$$

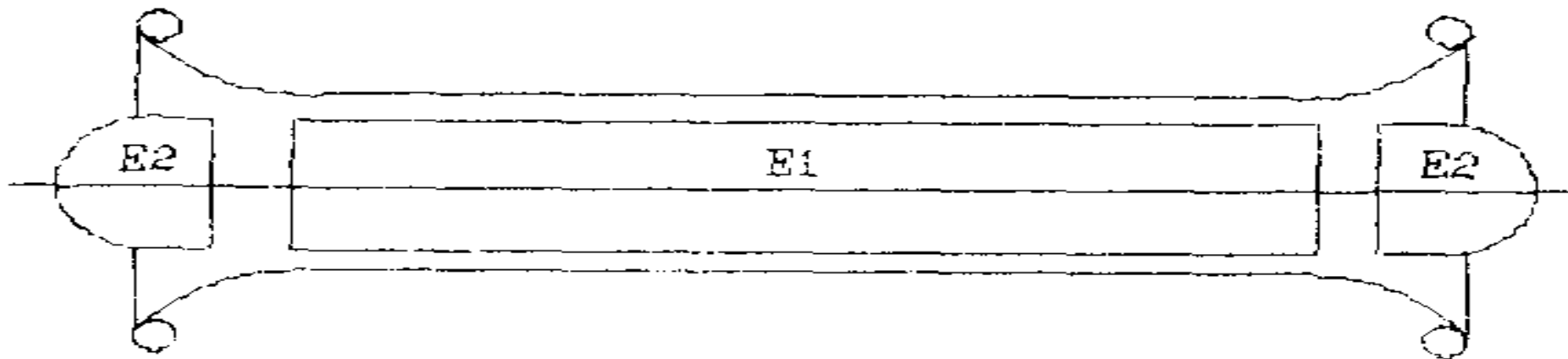
Jak wynika z wzoru (3.29) rozkład pola jest nierównomierny i odwrotnie proporcjonalny do odległości x (rys. 3.15b) od osi walców. Naprężenia maksymalne uzyska się w prosty sposób podstawiając do wzoru (3.29) zamiast x , promień walca wewnętrznego r :

$$K_m = \frac{U}{r \cdot \ln\left(\frac{R}{r}\right)} \quad (3.30)$$

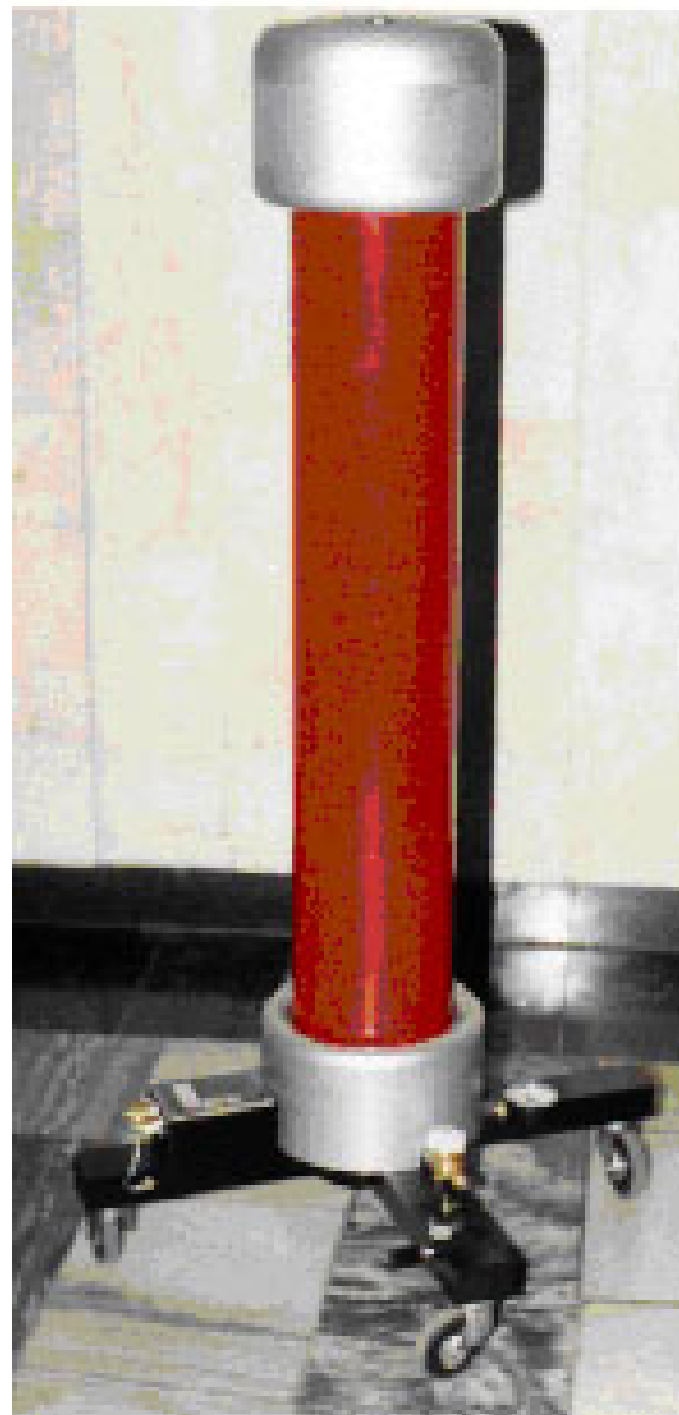
Natężenie \mathbf{K}_m osiąga duże wartości wówczas, gdy $\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{0}$ oraz gdy $\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{R}$. Gdy wyrażenie $r \cdot \ln\left(\frac{R}{r}\right)$ osiąga maksimum to wówczas \mathbf{K}_m osiąga optymalną minimalną wartość. Optimum to występuje przy warunku $\frac{R}{r} = e$, gdzie e jest podstawą logarytmu naturalnego, czyli wówczas gdy $\ln\left(\frac{R}{r}\right) = 1$. Obrazuje to rysunek 3.16, gdzie przedstawiono zależność bezwzględnych natężeń pola z wzoru (3.30), odniesionych do napięcia \mathbf{U} , w funkcji ilorazu promieni \mathbf{r}/\mathbf{R} . Jak widać maksima występują zarówno przy $\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{0}$ jak i przy $\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{R}$, a minimum występuje gdy $\frac{R}{r} = e$ czyli gdy $\frac{r}{R} = \frac{1}{e} \approx 0.368$, niezależnie od wartości promienia walca zewnętrznego.



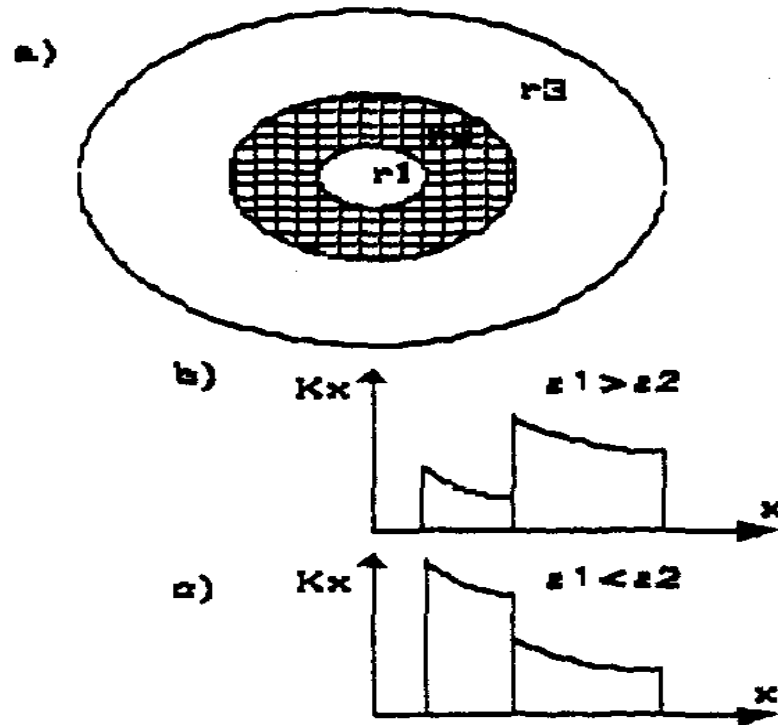
Układ walców współosiowych jest stosowany jako wzorcowy kondensator gazowy (rys. 3.17). Kondensator taki charakteryzuje się bardzo małą stratnością i ściśle zdefiniowaną pojemnością. Elektrody ochronne służą do wyeliminowania zniekształceń pola na krawędzi elektrod walcowych.



Rys. 3.17. Wzorcowy kondensator walcowy [17]
 E'_2 - elektrody uziemione, które pozwalają uniknąć zjawisk krawędziowych na elektrodzie E_2 a tym samym na jednoznaczne obliczenie pojemności kondensatora



Wykorzystując wzory wyprowadzone dla układu walców współosiowych z jednym dielektrykiem można przejść do analizy układu uwarstwionego (rys. 3.18).



Rys. 3.18. Rozkłady natężenia pola elektrycznego w uwarstwowionym układzie walców współosiowych:
a) układ elektrod, b) rozkład dla $\epsilon_1 > \epsilon_2$, c) rozkład dla $\epsilon_1 < \epsilon_2$

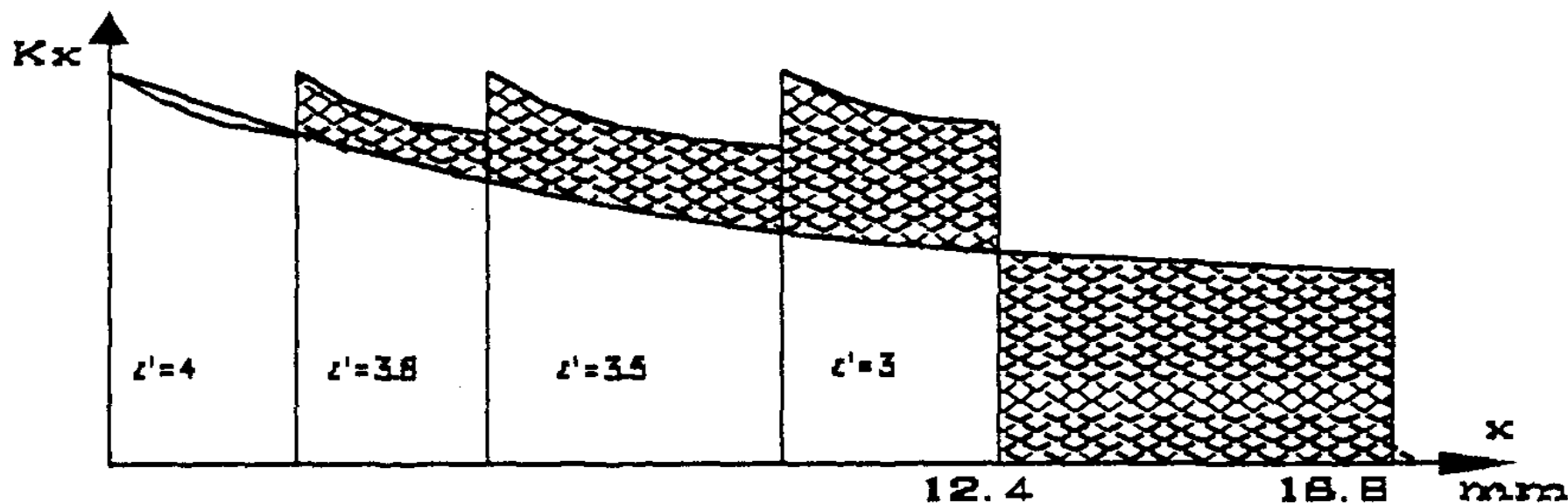
Dla każdej z warstw można, znając napięcie U_i na danej warstwie, określić natężenie pola tak jak dla pojedynczego układu walców współosiowych, a więc z wzoru (3.29). Należy, więc tylko określić napięcie U_i na danej warstwie. Korzysta się przy tym z faktu, że układ uwarstwiony stanowi szeregowo połączenie pojemności określonych wzorem (3.28), a napięcia na poszczególnych warstwach mają się tak do siebie jak odwrotności pojemności oraz, że suma napięć na warstwach jest równa całkowitemu napięciu układu. Stąd po prostych przekształceniach uzyskuje się wzór ogólny na zmienność natężenia pola w danej i -tej warstwie

$$K_i = \frac{U}{x \cdot \varepsilon'_i \cdot \left[\frac{1}{\varepsilon'_1} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{\varepsilon'_2} \cdot \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \dots + \frac{1}{\varepsilon'_i} \cdot \ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right) + \dots \right]} \quad (3.31)$$

Natężenie maksymalne w i-tej warstwie występuje na jej wewnętrznej powierzchni o mniejszym promieniu r_i zatem wynosi:

$$K_{im} = \frac{U}{r_i \cdot \varepsilon_i' \cdot \left[\frac{1}{\varepsilon_1'} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2'} \cdot \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \dots + \frac{1}{\varepsilon_i'} \cdot \ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right) + \dots \right]} \quad (3.32)$$

Na rysunku 3.19 pokazano przykład rozkładu natężenia pola w kablu o izolacji papierowo-olejowej złożonej z czterech warstw papieru o stopniowanej gęstości (największy ciężar właściwy ma papier przy żyły kabla i w miarę oddalania się od żyły ciężar właściwy maleje), a więc o stopniowanej przenikalności elektrycznej, od największej przy żyły do najmniejszej przy płaszczu kabla. Założeniem konstrukcji układu izolacyjnego jest, aby natężenia maksymalne w poszczególnych warstwach były jednakowe.



Rys. 3.19. Zasada stopniowania izolacji w kablu z izolacją papierowo-olejową

Z rysunku 3.19 można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Jeśli porównać kabel ze stopniowaną izolacją i kabel z izolacją jednorodną to przy tych samych napięciach i jednakowych maksymalnych natężeniach pola elektrycznego na powierzchni żyły kabel z izolacją stopniowaną będzie miał mniejszą średnicę zewnętrzną (cieńszą izolację), gdyż pole pod krzywą rozkładu natężenia pola elektrycznego jest równe napięciu, zatem pola zakreskowane na rysunku muszą być sobie równe;

2. Warunek jednakowych maksymalnych natężeń pola w poszczególnych warstwach przy stopniowaniu izolacji uzyska się z ogólnego wzoru (3.32) gdy będzie spełniona równość

$$r_i \cdot \mathcal{E}_i' = \text{const} \quad (3.33)$$

bowiem wyrażenie w nawiasach jest niezależne od tego, którą warstwę się rozpatruje.

Należy jeszcze wspomnieć, że izolacja kabla papierowo-olejowego jest wykonywana z papieru o grubościach 20÷150 μm nawijanego z tzw. prześwitem zapewniającym giętkość kabla.